या० इ० पेरेलमान
सरस गणित

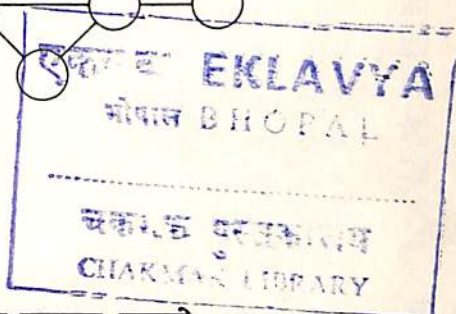
सरस गणित

Я. И. Перельман

ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА

Издательство «Наука», Москва

या॰ इ॰ पेरेलमान

सरस गणित

मीर प्रकाशन, मास्को

पीपुल्स पब्लिशिंग हाउस (प्रा.) लिमिटेड
५ ई, रानी झांसी रोड, नई दिल्ली-११००५५

राजस्थान पीपुल्स पब्लिशिंग हाउस (प्रा) लि.
चमेलीवाला मार्केट, एम. आई. रोड, जयपुर 302001

अनुवादक : देवेन्द्र प्र० वर्मा

на языке хинди

सोवियत संघ में मुद्रित

संस्करण प्रथम 1982

संस्करण द्वितीय 1990

ISBN 5-03-001644-9

विषय-सूची

अध्याय 1

नाश्ते पर पहेलियाँ

1. **मैदान में गिलहरी**. – आज सुबह मैं एक गिलहरी के साथ आँख मिचौनी खेल रहा था, – विश्राम-गृह में नाश्ते पर बैठे लोगों में से किसी ने कहना शुरू किया। – पास के जंगल में आपने एक गोल खुली जगह देखी होगी, जिसके बीचों-बीच एक पेड़ खड़ा है। गिलहरी इसी पेड़ के पीछे छिपी थी। मैदान में आते ही मैंने तने की ओट से अपनी ओर झाँकती गिलहरी की आँखें देखी। उसे पूरी तरह देखने के लिए मैं सावधानीपूर्वक मैदान की दूसरी ओर चलने लगा। पर उसकी नाक के सिवा मैं कुछ भी नहीं देख पाया। वह चालाक पहले की तरह ही मुझसे छिपी पेड़ के तने पर खिसक जाया करती थी। मैं चार बार पेड़ की परिक्रमा कर गया पर गिलहरी के चारों ओर नहीं घूम सका।

– लेकिन, – किसी ने आपत्ती उठायी, – आप खुद कह रहे हैं कि चार बार पेड़ का चक्कर लगा आये।

– पेड़ का, गिलहरी का नहीं!

– लेकिन गिलहरी तो पेड़ पर ही थी?

– इससे क्या होता है?

– यही कि आप गिलहरी का भी चक्कर लगा आये।

– यह भी खूब चक्कर लगाना हुआ, यदि एक बार भी उसकी पीठ नहीं दिखी।

– पीठ का प्रश्न ही नहीं है। गिलहरी केंद्र में है और आप वृत्त की परिधि पर घूम रहे हैं। अर्थात् आप गिलहरी का चक्कर लगा रहे हैं।

–बिल्कुल नहीं। मान लें कि मैं आप के चारों ओर चल रहा हूँ और आप अपनी पीठ छिपाये हमेशा मेरी ओर घूमे जा रहे हैं। आप ही बतायें, क्या मैं आपका चक्कर लगा रहा हूँ?

–बेशक। और नहीं तो क्या?

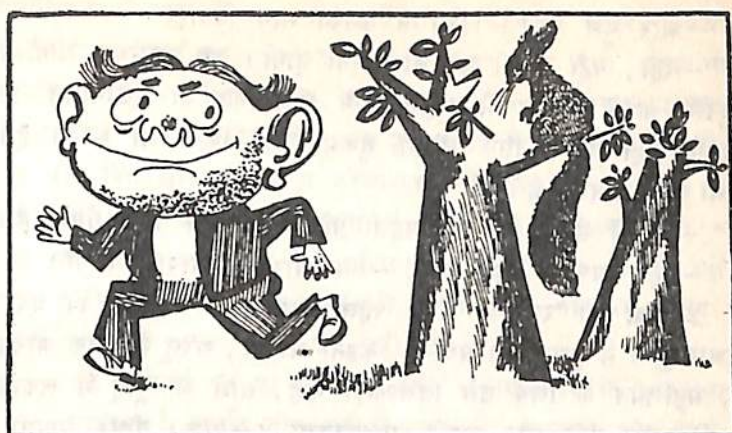
–आपका चक्कर लगा रहा हूँ, हालाँकि आपकी पीठ नहीं देख सकता?

–आप पीठ के चक्कर में क्यों पड़े हैं? सार तो इसमें है कि आप मेरे चारों ओर घूम कर पुरानी जगह लौट आते हैं। पीठ देखना आवश्यक नहीं है।

–देखिये: किसी चीज का चक्कर लगाने का क्या अर्थ है? मेरे खयाल में इसका सिर्फ एक अर्थ हो सकता है: एक क्रम से उन जगहों पर आ कर रुकना कि उस चीज को क्रमशः हर पार्श्व से देखा जा सके। मैं सही हूँ न, प्रोफेसर साहब?–बहस करने वाले ने पास बैठे वृद्ध से पूछा।

–सारतः आप शब्दों पर तर्क कर रहे हैं,–प्रोफेसर ने कहा।–ऐसी स्थितियों में बात उससे शुरू करनी चाहिये, जिससे निकली थी। पहले शब्दों के अर्थ तय कर लेने चाहिये। "किसी चीज का चक्कर लगाना"–इन शब्दों का क्या अर्थ है? इनके दो अर्थ हो सकते हैं। प्रथमतः यह समझा जा सकता है कि आप एक बंद (संवृत्त) वक्र पर घूम रहे हैं, जिसके भीतर वह चीज स्थित है। यह एक अर्थ हुआ। दूसरे: उस चीज के चारों तरफ इस तरह घूमना कि उसका हर पार्श्व देखा जा सके। यदि पहले अर्थ का अनुसरण किया जाये, तो आपको मानना पड़ेगा कि आप गिलहरी के चार चक्कर लगा चुके हैं। दूसरे अर्थ के अनुसार आपने गिलहरी का एक भी चक्कर नहीं लगाया। जैसा आप देखते हैं, यदि दोनों पक्ष एक भाषा में बोलें और शब्दों को एक ही अर्थ में प्रयुक्त करें, तो यहाँ तर्क का कोई प्रश्न नहीं उठता।

–खैर, माना कि दो अर्थ हो सकते हैं। लेकिन कौन-सा अर्थ अधिक सही है?

–इस तरह प्रश्न रखने की जरूरत नहीं है। आप कोई भी अर्थ सही मान सकते हैं। सिर्फ यह पूछना युक्तिसंगत होगा कि कौन-सा अर्थ सर्वमान्य है। मैं कहूँगा कि पहला अर्थ भाषा की आत्मा के अधिक

चित्र 1. "वह चालाक हर बार तने की दूसरी तरफ खिसक जाया करती थी"।

निकट है। आपको ज्ञात है कि सूरज 25 दिनों से कुछ अधिक समय में अपनी धूरी पर एक बार घूम जाता है।

—सूरज धूरी पर घूमता है?

—बेशक, वैसे ही जैसे पृथ्वी अपनी धूरी पर। लेकिन कल्पना कीजिये कि सूरज का यह घूर्णन काफी धीमा है—वह 25 दिनों में नहीं, बल्कि $365\frac{1}{4}$ दिनों, अर्थात् एक साल में एक पूरा चक्कर लगाता है। तब हमें सूरज का सिर्फ एक पृष्ठ दिखता; विपरीत अर्द्ध, सूरज की पीठ कभी नहीं देख पाते। लेकिन क्या इससे कोई कहता कि पृथ्वी सूरज के चारों ओर नहीं घूमती?

—हाँ, अब स्पष्ट है कि मैं गिलहरी के चारों ओर घूम रहा था।

—एक प्रस्ताव है, साथियों! यहाँ से हम लोग जाये नहीं। बारिष में कोई घूमने नहीं जायेगा और वह रुकने वाली नहीं लगती,—विवाद सुनने वालों में से एक ने कहा।—आइये, आज पहेलियों में समय व्यतीत किया जाये। शुरुआत हो चुकी है। हर आदमी बारी-बारी से कोई पहेली याद कर या सोच कर सुनाये। प्रोफेसर साहेब हमारे निर्णायक रहेंगे।

—यदि पहेलियाँ बीजगणित अथवा रेखागणित की होंगी, तो मुझे इन्कार कर देना चाहिये— एक युवती ने ऐलान किया।

–ग्रौर मुझे भी! –किसी ने उसका साथ दिया।

–नहीं, नहीं, सभी को भाग लेना होगा। हम उपस्थित लोगों से ग्रनुरोध करेंगे कि ग्रपनी पहेलियों में बीजगणित या रेखागणित का उपयोग नहीं करें; सिर्फ उनकी शुरूग्रात का किया जा सकता है। किसी को ग्रापत्ती है?

–तब मैं सहमत हूँ ग्रौर पहली पहेली सुनाने के लिये तैयार हूँ।

–बहुत ग्रच्छा, शुरू करें! –सब ग्रोर से ग्रावाजें ग्रायीं।

2. **साझे की रसोई**.–मेरी पहेली का जन्म परिनगर की एक विश्राम-कुटी में हुग्रा था। समस्या, कहना चाहिये, घरेलू है। एक ग्रौरत ने, सहूलियत के लिये उसे त्रिलक्कड़ा कहें, साझे के चूल्हे में लकड़ी के तीन कुंदे डाले ग्रौर दूसरी, पंचलक्कड़ा ने–पाँच। तीसरे ग्रादमी, बिनलक्कड़ ने (ग्राप समझ गये होंगे, उसके पास लकड़ी नहीं थी!) दोनों ग्रौरतों की सहमती से खाना बनाने में साझे के चूल्हे का उपयोग किया। इसके बदले उसने पड़ोसिनों को ग्राठ कोपेक दिये। कैसे वे इस राशि को ग्रापस में बाँटेंगी?

–ग्राधा-ग्राधा,–किसी ने उत्तर देने में जल्दीबाजी की।–बिन-लक्कड़ ने ग्राग का इस्तेमाल बराबर रूप से किया था।

–नहीं,–दूसरे ने ग्रापत्ती की,–ग्राग बनाने में दोनों ग्रौरतों की लकड़ियों के हिस्से को ध्यान में रखना चाहिये। जिसने तीन कुंदे दिये, उसे तीन कोपेक ग्रौर जिसने पाँच कुंदे दिये, उसे पाँच कोपेक मिलने चाहिये। यह सही बँटवारा होगा।

–मित्रों,–उस ग्रादमी ने टोका, जिसने खेल का प्रस्ताव रखा था ग्रौर ग्रब इस सभा का ग्रध्यक्ष माना जा रहा था,–पहेलियों का हल ग्रभी नहीं बतायें। हरेक को सोचने का ग्रवसर देते हैं। सही उत्तर का निर्णय जज महोदय शाम के खाने पर करेंगे। ग्रब दूसरा ग्रादमी शुरू करे। पायोनियर जी, ग्रापकी बारी है।

3. **स्कूली ग्रध्ययन-मंडलियों* का कार्य**.–हमारे स्कूल में,–

---

*मुख्य विषयों से परे किसी चीज में दिलचस्पी रखने वाले बच्चे क्लास के बाद उसका ग्रध्ययन मंडलियों में करतें हैं। ग्रावश्यक शिक्षकों तथा उपकरणों की व्यवस्था स्कूल की ग्रोर से की जाती है।–**ग्रनु०**

पायोनियर ने शुरू किया, – 5 मंडलियाँ हैं, जिनमें क्रमशः मिस्त्री, बढ़ईगिरी व फोटोग्राफी के कार्य, शतरंज का खेल तथा कोरस-गान सिखाया जाता है। मिस्त्रियों की मंडली एक दिन छोड़ कर काम करती है, बढ़ईयों की – दो दिन छोड़ कर हर तीसरे दिन, फोटोग्राफी की – हर चौथे दिन और शतरंज व कोरस-गान की – क्रमशः हर पाँचवे तथा छठे दिन। एक जनवरी को स्कूल में सभी पाँच मंडलियाँ काम कर रही थीं। इसके बाद दिये गये रूटिन के अनुसार काम करती रहीं। प्रश्न है कि प्रथम तीन महीनों में ऐसी कितनी शामें थीं जब स्कूल में पाँचों मंडलियाँ साथ काम कर रही थीं?

– यह अधिवर्ष था या साधारण वर्ष? – पायोनियर से पूछा गया।

– साधारण? अर्थात् तीन महीनों – जनवरी, फरवरी और मार्च – में 90 दिन गिने जाने चाहिये?

– जाहिर है।

मैं आपकी पहेली में एक और प्रश्न शामिल करने की अनुमति माँगता हूँ, – प्रोफेसर ने कहा। – इन तीन महीनों में कितनी ऐसी शामें थीं, जब स्कूल में एक भी मंडली काम नहीं कर रही थी?

– मैं समझ गया! – आवाज सुनायी दी। – प्रश्न में एक चाल छिपी है। कोई भी ऐसा दिन नहीं होगा, जब सभी पाँच मंडलियाँ काम करेंगी या एक भी नहीं करेगी। यह बिल्कुल साफ है।

– क्यों? – अध्यक्ष ने पूछा।

– मैं समझा नहीं सकता, पर मुझे लग रहा है कि जवाब देने वालों को बेवकूफ बनाना चाहते हैं।

– यह कोई तर्क नहीं हुआ। शाम को पता चलेगा कि आपको सही लग रहा है या गलत। अब आपकी बारी है, मित्र!

4. **कौन अधिक गिना?** – दो आदमी एक घंटे के दौरान फूटपाथ पर सभी आने और जाने वाले लोगों को गिन रहे थे। पहला आदमी घर के फाटक के पास खड़ा था और दूसरा फूटपाथ पर आगे-पीछे घूम रहा था। किसकी गिनती में अधिक लोग आये?

– चलते रहने पर अधिक लोग गिनती में आ जायेंगे, यह बिल्कुल स्पष्ट है, – टेबुल के दूसरे छोर से आवाज आयी।

–उत्तर शाम को पता चलेगा,–अध्यक्ष ने ऐलान किया।–अब किसकी बारी है?

5. **दादा-पोता**.–मैं सन् 1932 की बात बताने जा रहा हूँ। उस समय मेरी उम्र ठीक उतनी थी, जितनी मेरे जन्म-वर्ष के दो आखिरी अंकों की संख्या बताती है। जब मैं ने इस संबंध में अपने दादा जी से बात की, तो उन्होंने यह कह कर मुझे आश्चर्यचकित कर दिया कि उनकी उम्र के साथ भी यही बात है। मुझे यह असंभव सा लगा...

–जाहिर है कि असंभव है,–किसी की आवाज बीच से उठी।

–मानिये कि बिल्कुल संभव है। दादाजी ने यह सिद्ध कर के दिखा दिया। क्या उम्र थी उस समय हम दोनों की?

6. **रेल-टिकटें**.–मैं स्टेशन पर बुकिंग-क्लर्क हूँ,–खेल में आगे भाग लेने वाली ने कहा।–बहुतों को यह काम आसान लगता है। उन्हें संदेह भी नहीं होता कि एक छोटे स्टेशन के भी बुकिंग-क्लर्क को टिकटों की कितनी बड़ी संख्या के साथ काम करना पड़ता है। आखिर यात्रियों को उस लाइन के किसी भी स्टेशन तक जाने के लिये टिकट की जरूरत पड़ सकती है और एक ही ओर की नहीं, बल्कि दोनों ओर की आती-जाती टिकट की भी आवश्यकता पड़ सकती है। मैं 25 स्टशनों वाली लाइन पर काम करती हूँ। बतायें कि इन सभी स्टेशनों के लिये कुल कितने प्रकार के टिकट रेल-विभाग को छापने पड़ते हैं?

–अब आपकी बारी है, पायलट महोदय,–अध्यक्ष ने कहा।

7 **हेलीकाप्टर की उड़ान**.–लेनिनग्राद से एक हेलीकाप्टर ठीक उत्तर की ओर उड़ता है। इस दिशा में 500 कि॰ मी॰ उड़ने के बाद वह पूर्व की ओर मुड़ता है। इस दिशा में फिर 500 कि॰ मी॰ उड़ने के बाद वह दक्षिण की ओर मुड़ता है और 500 कि॰ मी॰ उड़ता है। इसके बाद पश्चिम की ओर मुड़ता है और 500 कि॰ मी॰ उड़ कर उतर आता है। प्रश्न है: हेलीकाप्टर के उतरने का स्थान कहाँ है; लेनिनग्राद से किस ओर है–पूरब, पश्चिम, उत्तर या दक्षिण?

–बेवकूफों के लिये यह सवाल है,–किसी ने कहा,–500 कदम आगे, 500 कदम दायें, 500 कदम पीछे और 500 कदम बायें–कहाँ आये? वहीं, जहाँ से चले थे।

चित्र 2. "मैं बुकिंग क्लर्क हूँ"।

–फिर बतायें, कहाँ आपके अनुसार हेलीकाप्टर उतरा?

–उसी लेनिनग्राद के हवाई अड्डे पर, जहाँ से उड़ा था। क्या सही नहीं है?

–नहीं।

–तब मेरी समझ में कुछ नहीं आ रहा।

–सचमुच इसमें कोई गड़बड़ी है,–पड़ोसी ने बातचीत में घुसते हुए कहा।–क्या हेलीकाप्टर लेनिनग्राद में नहीं उतरा?.. क्या प्रश्न दुहरा नहीं सकते आप?

पायलट ने सहर्ष अनुरोध पूरा कर दिया। ध्यानपूर्वक सुनने के बाद सब चकरा कर एक दूसरे की ओर देखने लगे।

–खैर,–अध्यक्ष ने कहा,–इस प्रश्न के बारे में सोचने के लिये शाम तक समय है। अभी आगे चलें।

8. छाया.–अगली पहेली सुनाने वाले ने हेलीकाप्टर को ही अपनी पहेली का कथानक बनाने की अनुमति मांगी और पूछा: क्या बड़ा होगा–हेलीकाप्टर या उसकी पूर्ण छाया?

–बस इतनी-सी पहेली है?

–हाँ।

छाया निस्संदेह हेलीकाप्टर से बड़ी होगी, क्योंकि सूर्य-किरणें पंखों की तरह अपसृत होती हैं, – हल तुरंत सामने रखा गया।

– उलटा, – किसी ने आपत्ती की, सूर्य-किरणें समानांतर चलती हैं, अतः हेलीकाप्टर और उसकी छाया बराबर होंगी।

– क्या कहते हैं? क्या आपने कभी बादलों के पीछे छिपे सूरज से अपसृत होती किरणों को नहीं देखा है? जब खुद आँखों से देखेंगे, तब विश्वास करेंगे कि सूर्य-किरणें कितनी अपसृत होती हैं। हेलीकाप्टर की छाया हेलीकाप्टर से काफी बड़ी होगी, जैसे बादल की छाया खुद बादल से बड़ी होती है।

– फिर सूर्य-किरणों को अक्सर समानांतर क्यों मानते हैं? नौयात्री, ज्योतिर्विद् – सभी यहीं मानते हैं...

अध्यक्ष ने विवाद बढ़ने नहीं दिया और अगली पहेली के लिये अनुरोध किया।

9. तीलियों का प्रश्न. अगले वक्ता ने टेबुल पर डिब्बी की सारी तीलियां उलट दी और उन्हें तीन ढेरों में बाँटने लगा।

– आप क्या अंगीठी सुलगाना चाहते हैं? – श्रोताओं ने मजाक शुरू किया।

– पहेली तीलियों से संबंधित है, – पहेली सुनाने वाले ने समझाया। – ये रहे उनके तीन असमान ढेर। तीनों में कुल मिला कर 48 तीलियां हैं। किस ढेर में कितनी हैं, मैं नहीं बताऊँगा। आप निम्न तथ्य जान लें: यदि पहले ढेर से दूसरे में इतनी तीलियां मिला दूं, जितनी दूसरे ढेर में थीं, फिर दूसरे से तीसरे में उतनी तीलियां रखूं, जितनी तीसरे ढेर में पहले से थीं और, अंत में, तीसरे से पहले ढेर में उतनी तीलियां डाल दूं, जितनी पहले ढेर में बची होंगी, तो सभी ढेरों में तीलियों की संख्यायें समान हो जायेंगी। अब बताइये, प्रत्येक ढेर में पहले कितनी तीलियां थीं?

10. धोखेबाज ठूंठ – यह पहेली, – अगले ने कहना शुरू किया, – एक प्रश्न की याद दिलाती है, जिसे बहुत दिन पहले एक ग्रामीण 'गणितज्ञ' ने मुझे दिया था।

यह एक पूरा किस्सा था और काफी मजेदार किस्सा था। जंगल में एक किसान को कोई अनजान बूढ़ा मिला। दोनों बातें करने लगे। बूढ़े ने किसान को ध्यान से देखा, फिर कहा:

— मैं जंगल में एक कटे ठूंठ को जानता हूँ। जरूरत पर मदद करने का वह अनोखा गुण रखता है।

— कैसे वह मदद करता है? रोग दूर करता है?

— वह दवा का काम नहीं करता। वह पैसे दुगुने करता है। उसकी जड़ के पास बटुआ रख कर सौ तक गिनते हैं — और बटुए में पैसे दुगुने हो जाते हैं। ऐसा अनूठा गुण है उस ठूंठ में।

— काश, मुझे एक मौका मिलता! — किसान ने सपने देखते हुए कहा।

— तुम भी कर सकते हो। लेकिन मुफ्त में नहीं; पैसे देने होंगे।

— किसे? काफी महंगा होगा क्या?

— उसे, जो राह दिखायेगा। मतलब कि मुझे। और महंगे-सस्ते की बात अलग से होगी।

मोल-जोल शुरू हो गया। यह जान कर कि किसान के पास पैसे कम हैं, बूढ़ा एक बार पैसे दुगुना कराने के 1 रूबल 20 कोपेक लेने को मान गया। इसी पर दोनों राजी हो गये।

बूढ़ा किसान को घने जंगल में ले गया, काफी देर तक घुमाता रहा और अंत में झाड़ियों में घास से दबे एक ठूंठ के पास पहुँचा। किसान के हाथ से बटुआ लेकर बूढे ने उसे ठूंठ की जड़ों के बीच घुसेड़ दिया। 100 तक गिनने के बाद बूढ़े ने जड़ों में इधर-उधर कुछ ढूंढ़ना और टटोलना शुरू कर दिया। अंत में उसने बटुए को ढूंढ़ निकाला और किसान के हाथों में दे दिया।

किसान ने बटुए में झांक कर देखा। पैसे सचमुच दुगुने हो गये थे! उसमें से उसने 1 रूबल 20 कोपेक गिन कर बूढ़े को दे दिये और बचे पैसों को फिर से अनूठे ठूंठ की जड़ में रखने का अनुरोध किया।

फिर सौ तक गिना गया, बूढ़ा फिर जड़ों में हाथ घुसा कर कुछ ढूंढ़ने-सा लगा और चमत्कार फिर से दुहरा गया: बटुए में पैसे दुगुने हो गये। बूढ़े को बटुए से शर्त्त के अनुसार पुनः 1 रूबल 20 कोपेक मिल गये।

बटुए को तीसरी बार ठूंठ की जड़ों में घुसाया गया। पैसे इस

बार भी दुगुने हो गये। लेकिन जब किसान बूढ़े का मेहनताना अदा कर चुका, तो बटुए में एक कोपेक भी नहीं बचा। बेचारे ने इस गोरख-धंधे में सारे पैसे गँवा दिये। दुगना करने को अब कुछ बचा नहीं था और किसान उदास होकर जंगल से निकल पड़ा।

पैसे दुगुने होने के चमत्कार का रहस्य तो आप बेशक समझ गये होंगे: बूढ़ा यूं ही जड़ों के बीच बटुआ ढूढ़ने में देर नहीं लगाया करता था। लेकिन क्या आप दूसरे प्रश्न का उत्तर दे सकते हैं: धोखेबाज ठूंठ के साथ ये अभागे प्रयोग करने के पहले किसान के पास कितने पैसे थे?

11. **दिसंबर की समस्या**—साथियों, भाषाविद् होने के नाते मैं गणित से बहुत दूर हूँ,—अधेड़ आदमी ने कहना शुरू किया (उसी की बारी थी अब पहेली सुनाने की)।—मुझसे गणित के प्रश्नों की उम्मीद न करें। मैं सिर्फ अपने परिचित क्षेत्र से ही कोई प्रश्न पूछ सकता हूँ। कैलेंडर से संबंधित एक पहेली है। सुनाऊँ?

—अवश्य!

—बारहवें महीने का नाम है "दिसंबर"। क्या आप "दिसंबर" का अर्थ जानते हैं? इस शब्द का मूल है यूनानी शब्द "देका"*, अर्थात् दस। देकालीटर का अर्थ है दस लीटर, देकाद का—दस दिन, आदि। इस प्रकार बारहवें महीने दिसंबर का नाम हुआ "दसवाँ"। इस गड़बड़ी को कैसे समझाया जा सकता है?

—बस, अब एक और पहेली बच गयी है,—अध्यक्ष ने घोषित किया।

12. **अंकगणित का जादू**— मेरा नंबर आखिरी है, बारहवाँ। मन बहलाव के लिये मैं अंकों का एक जादू दिखाता हूँ। आपसे अनुरोध होगा कि आप उसका रहस्योद्घाटन करें। आप में से कोई या अध्यक्ष महोदय, आप, एक कागज पर मुझ से छिपा कर तीन अंकों की कोई संख्या लिख लें।

---

*अंग्रेजी में डिसंबर, डेका, डेकाड, आदि। यूनानी भाषा में 'ड' ध्वनि नहीं है।

–इनमें शून्य भी हो सकते हैं?

–कोई रोक नहीं है। कोई भी तीन अंकों की संख्या, जो आपको पसंद हो।

–लिख लिया। अब क्या करना है?

–इसके पास ही इस संख्या को फिर से लिख कर इसे छे अंकों की संख्या बना लें।

–तैयार है।

–कागज अपने पड़ोस में बैठे आदमी को दे दीजिये, जो मुझसे दूर बैठा है। वह इसमें सात से भाग दे ले।

–कहना आसान है: सात से भाग दे लें। हो सकता है कि संख्या सात से कटे ही न।

–पहले भाग दीजिये, फिर देखा जायेगा।

–आपके भाग्य से भाग पूरा हो गया।

–भागफल बिना मुझे बताये कागज अपने दूसरे पड़ोसी को दे दीजिये। वह उसमें 11 से भाग दे ले।

–आप सोचते हैं कि फिर भाग लग जायेगा?

–भाग दीजिये। शेष नहीं बचेगा।

–सचमुच शेष नहीं बचता! अब क्या करना है?

–उत्तर अगले आदमी को दे दें। वह उसे... उदाहरण के लिये, 13 से विभाजित करे।

–अच्छी संख्या नहीं चुनी आपने। ऐसी संख्यायें बहुत ही कम हैं, जो 13 से विभाजित होती हैं।... अरे नहीं, आपकी किस्मत अच्छी है! पूरा-पूरा कट जाता है।

–एक कागज पर उत्तर लिख कर मुझे दे दीजिये। कागज मोड़ लीजिये, ताकि मैं संख्यायें देख न सकूं।

कागज खोले बगैर "जादूगर" ने कागज अध्यक्ष को सौंप दिया।

–यह रही संख्या, जिसे आपने पहले सोच कर लिखा था। ठीक है न?

–बिल्कुल ठीक! –कागज खोल कर आश्चर्य से उसने कहा।–यही संख्या मैंने सोची थी... अब कोई पहेली सुनाने वाला नहीं रहा, अतः सभा खत्म करनी चाहिये। अच्छा है कि वर्षा भी थम चुकी है।

पहेलियों के उत्तर आज ही शाम को खाने पर घोषित किये जायेंगे। आप उनके हल कागज पर लिख कर मुझे दे सकते हैं।

1 – 12 पहेलियों के हल

1. मैदान में गिलहरी वाली पहेली का पूर्ण विश्लेषण पहले ही दिया जा चुका है। हम आगे की पहेलियाँ देखेंगे।

2. जैसा कि बहुत से लोग करते हैं, आठ कोपेक को 1 कोपेक प्रति कुंदे की दर से 8 कुंदों का मूल्य मानना गलत होगा। पैसे 8 कुंदों के तीसरे भाग के लिये दिये गये थे, क्योंकि आग का इस्तेमाल तीनों ने समान रूप से किया था। इससे निष्कर्ष निकलता है कि 8 कुंदों की कीमत 8×3, अर्थात 24 कोपेक आँकी गयी थी और एक कुंदे की कीमत थी 3 कोपेक।

अब समझना सरल होगा कि किसे कितना मिलना है। पंचलक्कड़ा ने 5 कुंदों के रूप में 15 कोपेक खर्च किया, लेकिन उपयोग किया सिर्फ 8 कोपेक का। उसे 15–8, अर्थात 7 कोपेक मिलने चाहिये। त्रिलक्कड़ा को तीन कुंदों के लिये 9 कोपेक मिलने चाहिये, पर वह 8 कोपेक का उपभोग कर चुकी है। अतः उसे 9–8, अर्थात 1 कोपेक मिलना चाहिये।

अतः सही बँटवारे के अनुसार पंचलक्कड़ा को 7 कोपेक मिलने चाहिये और त्रिलक्कड़ा को – 1 कोपेक।

3. यदि हम ऐसी लघुत्तम संख्या ढूंढ़ लें, जो बिना शेष 2,3,4,5 तथा 6 से विभाजित हो, तो प्रथम प्रश्न – कितने दिनों बाद स्कूल में सभी मंडलियाँ फिर एक साथ काम करेंगी – का उत्तर आसानी से दिया जा सकता है। स्पष्ट है कि ऐसी संख्या 60 है। अर्थात 61-वें दिन फिर से पाँचों मंडलियाँ एक साथ काम करेंगी : मिस्त्रियों की 30 द्वि-दिवसीय अंतराल के बाद, बढ़ईगिरी की – 20 त्रि-दिवसीय अंतरालों के बाद, फोटोग्राफी की – 15 चौ-दिवसीय अंतरालों के बाद, शतरंज की – 12 पंच-दिवसीय अंतरालों के बाद और कोरस-गान की – 10 छ-दिवसीय अंतरालों के बाद। 60 दिन के पहले ऐसी शाम नहीं हो

सकती। ऐसी शाम फिर 60 दिनों बाद आयेगी, पर यह वर्ष के दूसरे चतुर्थांश में होगा।

इस प्रकार, प्रथम चतुर्थांश में सिर्फ एक शाम होगी, जब पाँचों मंडलियाँ फिर से एक साथ काम करेंगी।

पहेली के दूसरे प्रश्न – कितनी शामों को एक भी मंडली काम नहीं करेगी – का हल अधिक जटिल है। इस तरह के दिनों को ज्ञात करने के लिये 1 से 90 तक की सभी संख्याओं को लिख लेना होगा। इनमें से मिस्त्रियों की मंडली के काम करने के दिनों को, अर्थात 1,3,5,7,9, आदि संख्याओं को काट देना होगा। इसके बाद इनमें से बढ़इयों की मंडली के काम करने के दिन, अर्थात 4-थे, 7-वे, 10-वे, आदि दिन काटने पड़ेंगे। जब हम फोटोग्राफी, शतरंज तथा कोरस-गान की मंडलियों के काम करने के दिन काट चुकेंगे, तो सिर्फ वे दिन बचेंगे, जब प्रथम चतुर्थांश में एक भी मंडली ने काम नहीं किया।

इतना कर चुकने के बाद आप देख सकते हैं कि मंडलियों के काम से छुट्टी के दिन बहुत-से हैं – कुल 24 दिन। जनवरी में ऐसे दिन 8 होंगे: 2-री, 8-वीं, 12-वीं, 14-वीं, 18-वीं, 20-वीं 24-वीं तथा 30-वीं जनवरी। फरवरी और मार्च में क्रमशः 7 और 9 ऐसे दिन होंगे।

4. दोनों ने आने-जाने वालों की एक ही संख्या गिनी। फाटक के पास खड़ा व्यक्ति आने वालों और जाने वालों, दोनों को ही गिनता गया। सड़क पर आगे-पीछे घूमने वाला व्यक्ति सिर्फ अपने सामने से आने वाले लोगों को गिनता है। पर चूंकि वह दोनों दिशाओं में घूम रहा है, वह भी आने वालों और जाने वालों – दोनों को ही – गिन रहा है।

हल दूसरी तरह से भी दिखाया जा सकता है। फूटपाथ पर घूम-घूम कर गिनने वाला व्यक्ति जब पहली बार अपने खड़े मित्र के पास लौटता है, दोनों आने-जाने वालों की एक ही संख्या पाते हैं, क्योंकि हर आदमी, जो खड़े व्यक्ति के पास से गुजरता है, घूम-घूम कर गिनने वाले को सामने से आता दिखेगा (या जाते वक्त या लौटते वक्त)। इसका विपरीत भी सत्य है। अतः हर बार जब घूम कर गिनने वाला व्यक्ति अपने खड़े मित्र के पास लौटता है, उतने ही लोगों

को गिनता है, जितनों को खड़ा व्यक्ति गिन चुका होता है। एक घंटे बाद जब दोनों गिनने वाले ग्राखिरी बार मिलते हैं ग्रौर ग्रपनी-ग्रपनी गिनती एक दूसरे को बताते हैं, तब भी यही होगा।

5. पहली निगाह में लगता है कि प्रश्न सचमुच गलत है: निष्कर्ष निकलता है कि दादे ग्रौर पोते की उम्र एक ही है। पर, जैसा हम ग्रभी देखेंगे, प्रश्न की शर्त्तें सरलतापूर्वक पूरी हो जाती हैं।

पोता ग्रधिक संभव है कि 20-वीं सदी में पैदा हुग्रा था। ग्रतः उसके जन्म के साल के प्रथम दो ग्रंक 19 होंगे ग्रौर पूरी संख्या में सैकड़े का स्थान लेंगे। बाकी बचे ग्रंकों की संख्या दुगुना करने पर 32 ग्राना चाहिये। ऐसी संख्या 16 है। ग्रतः पोते के जन्म का वर्ष है 1916 ग्रौर सन् 1932 में उसकी उम्र 16 वर्ष थी।

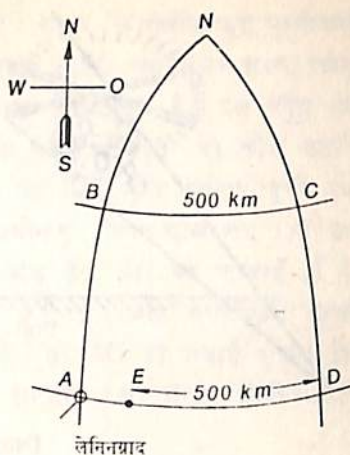
दादा का जन्म निस्संदेह 19-वीं सदी में हुग्रा था; उसके जन्म-वर्ष के प्रथम दो ग्रंक 18 है। बाकी बचे ग्रंकों की संख्या को दुगुना करने पर 132 ग्राने चाहिये। ऐसी संख्या 132 की ग्राधी, ग्रर्थात 66 होगी। दादा का जन्म सन् 1866 में हुग्रा था ग्रौर 1932 में वह 66 वर्ष का था।

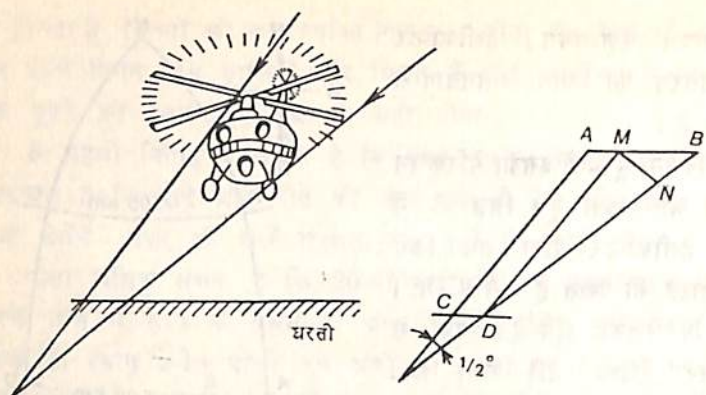
इस प्रकार सन् 1932 में दादे ग्रौर पोते, दोनों की ही उम्र उतनी थी, जितनी उनके जन्म-साल के ग्राखिरी दो ग्रंक बताते हैं।

6. 25 स्टेशनों में से प्रत्येक पर यात्री बाकी बचे स्टेशनों में से किसी के लिये भी टिकट मांग सकते हैं। ग्रतः $25 \times 24 = 600$ प्रकार के भिन्न टिकट छापने पड़ेंगे। यदि यात्रियों को सिर्फ जाने के लिये ही नहीं, बल्कि वापस लौटने के लिये जाती-ग्राती टिकट की भी जरूरत पड़ती है तो विभिन्न टिकटों की संख्या दुगुनी, ग्रर्थात 1200 हो जायेगी।

7. प्रश्न में कोई ग्रंतर्विरोध नहीं है। यह नहीं सोचना चाहिये कि हेलीकाप्टर एक वर्ग की परिरेखा पर उड़ता है। पृथ्वी के गोल ग्राकार को भी ध्यान में रखना चाहिये। बात यह है कि उत्तर की ग्रोर देशांतर रेखायें परस्पर पास होती जाती हैं (चित्र 3), ग्रतः लेनिनग्राद के ग्रक्षांश से 500 कि० मी० उत्तर के ग्रक्षांश पर 500 कि० मी० चल कर हेलीकाप्टर ग्रधिक देशांतर रेखाग्रों को पार करता है, बनिस्बत कि पुनः लेनिनग्राद के ग्रक्षांश पर 500 कि० मी० की दूरी तय करने

के बाद। फलस्वरूप, हेलीकाप्टर के उतरने का स्थान लेनिनग्राद से पूरब है।

कितना पूरब ? इसका परिकलन किया जा सकता है। चित्र 3 में आप हेलीकाप्टर द्वारा तय किये गये रास्ते को देखते हैं – ABCDE। बिंदु N उत्तरी ध्रुव है। यहाँ से देशांतर रेखायें AB तथा DC अपसृत होती हैं। हेलीकाप्टर पहले उत्तर की ओर, अर्थात AN देशांतर रेखा पर 500 कि० मी० (A से B तक) उड़ता है। देशांतर पर

चित्र 3

111 कि० मी० की दूरी पृथ्वी के केंद्र पर 1 डिग्री का अक्षांश कोण बनाती है, अत: 500 कि० मी० की दूरी $500 : 111 \approx 4.5^\circ$ का अक्षांश कोण बनायेगी। लेनिनग्राद (A) का अक्षांश 60° है, अत: B का अक्षांश होगा $60^\circ + 4.5^\circ = 64.5^\circ$। इसके बाद हेलीकाप्टर पूरब की ओर 500 कि० मी० की दूरी (BC) तय करता है। परिकलन कर सकते हैं या सारणियों से पता लगा सकते हैं कि BC अक्षांश (64.5°) पर 48 कि० मी० की दूरी पृथ्वी के केंद्र पर एक डिग्री का देशांश कोण बनाती है। अत: 500 कि० मी० की दूरी $500 : 48 \approx 10.4^\circ$ का देशांश कोण बनाती है। अर्थात हेलीकाप्टर B से C तक में 10.4° देशांश तय करता है। इसके बाद वह CD देशांतर रेखा पर 500 कि० मी० चल कर पुन: लेनिनग्राद के अक्षांश पर पहुँच जाता है। अब वह पश्चिम की ओर D से A की ओर 500 कि० मी० की दूरी तय करता है और यह दूरी AD से कम है। AD दूरी में उतने ही देशांश हैं जितने BC में, अर्थात 10.4°। पर 60° अक्षांश पर एक डिग्री देशांतर की लंबाई 55.5 कि०मी० है। अत: AD की पूरी लंबाई हुई $55.5 \times 10.4 \approx 577$ कि० मी०। इस प्रकार, हम देखते हैं कि हेलीकाप्टर लेनिनग्राद में नहीं, बल्कि उससे 77 कि० मी० पूरब

चित्र 4

उतरता है। यहाँ लादोश्की झील है और हेलीकाप्टर को पानी की सतह पर उतारना पड़ा होगा।

8. इस प्रश्न पर बहस करने वाले लोगों ने कई गलत बातें कही हैं। यह गलत है कि पृथ्वी तक आने वाली सूर्य-किरणों के अपसरण की गणना की जा सकती है। पृथ्वी सूर्य की दुरी की तुलना में इतनी छोटी है कि किरणों के अपसरण का कोण नगण्य होता है। व्यावहारिक तौर पर इन किरणों को समानांतर मान सकते हैं। बादलों के पीछे से झाँकते सूर्य की किरणों का पंखाकार अपसरण परिप्रेक्ष्य के प्रभाव के कारण प्रतीत होता है।

परिप्रेक्ष्य में समानातंर किरणें दूर जा कर संसृत प्रतीत होती हैं। आप दूर जाने वाली रेल-पटरियों या किसी लम्बी वीथी का दृश्य स्मरण कर सकते हैं।

लेकिन सूर्य-किरणों के पृथ्वी पर समानातंर आपतन से यह निष्कर्ष निकालना गलत होगा कि हेलीकाप्टर तथा उसकी छाया के आकार बराबर होंगे। चित्र 4 को देख कर आप समझ जायेंगे कि हेलीकाप्टर की पूर्ण छाया का आकार पृथ्वी की दिशा में घटेगा। अतः पृथ्वी तल पर छाया का आकार हेलीकाप्टर के आकार से छोटा होगा : CD छोटा होगा AB से।

यदि हेलीकाप्टर की सही ऊँचाई ज्ञात हो, तो दोनों की लंबाइयों

के अंतर का कलन किया जा सकता है। माना कि हेलीकाप्टर पृथ्वी-तल से 100 मीटर की ऊँचाई पर उड़ रहा है। AC तथा BD सरल रेखाओं के बीच का कोण जमीन से सूर्य का दृश्य-कोण है। इस कोण का माप $1/2^\circ$ ज्ञात है। यह भी ज्ञात है कि आँखों पर $1/2^\circ$ का कोण बनाने वाली वस्तु आँखों से अपने आकार के 115 गुनी अधिक दूरी पर होती है। अतः रेखा-खंड MN (जो जमीन पर स्थित आँख पर $1/2^\circ$ का कोण बनाती है) AC का 115-वाँ अंश है। AC की लम्बाई A से जमीन तक की अनुलांबिक लंबाई से बड़ी है। यदि सूर्य-किरणें पृथ्वी तल के साथ 45° का कोण बनाती हैं, तो AC की लंबाई (जब कि हेलीकाप्टर की ऊँचाई 100 मीटर है) लगभग 140 मीटर होगी। अतः $MN = \frac{140}{145} \approx 1.2$ मीटर।

लेकिन हेलीकाप्टर की लंबाई और उसकी छाया की लंबाई का अंतर MB बड़ा है MN से। चूंकि $\angle MBD$ लगभग ठीक 45° है, MB 1.4 गुना बड़ा है MN से। अतः $MB = 1.2 \times 1.4 \approx 1.7$ मीटर।

जो कुछ भी ऊपर कहा गया है, वह हेलीकाप्टर की **पूर्ण छाया** के बारे में कहा गया है, जो काली और स्पष्ट होती है। ये कथन तथाकथित उपछाया (**अर्द्धछाया**) के लिये सही नहीं उतरते, जो हल्की तथा अस्पष्ट होती है।

हमारे कलन से स्पष्ट है कि यदि हेलीकाप्टर की जगह पर 1.7 मीटर से कम व्यास वाला कोई गुब्बारा होता तो जमीन पर उसकी कोई पूर्ण छाया नहीं बनती। हम सिर्फ धूंधली अर्द्धछाया देखते।

9. प्रश्न का हल अन्त से शुरू करते हैं। अंत में तीनों ढेरों में तीलियों की संख्यायें बराबर थीं। तीलियों का इधर-उधर रखना उनकी कुल संख्या पर कोई प्रभाव नहीं डालता, अतः उनकी कुल संख्या पहले की तरह 48 ही रही। अतः अंत में हर ढेर में 16 तीलियाँ थीं:

पहला ढेर	दूसरा ढेर	तीसरा ढेर
16	16	16

ठीक इसके पहले प्रथम ढेर में उतनी तीलियाँ रखी गयी थीं, जितनी उसमें पहले से थीं। दूसरे शब्दों में, प्रथम ढेर में तीलियों की

संख्या **दुगुनी** हो गयी। अर्थात प्रथम ढर में 16 नहीं, बल्कि सिर्फ 8 तीलियाँ थीं। तीसरे ढेर में, जहाँ से 8 तीलियाँ ली गयी थीं, 16 + 8 = 24 तीलियाँ थीं :

पहला ढेर	दूसरा ढेर	तीसरा ढेर
8	16	24

अब, हमें ज्ञात है कि इसके पूर्व दूसरे ढेर से तीसरे में उतनी तीलियाँ रखी गयी थीं, जितनी उसमें पहले से थीं। अर्थात, 24— तीसरे ढेर में पहले से पड़ी तीलियों की **दुगुनी** संख्या है। अतः तीलियों के प्रथम हेर-फेर के बाद ढेरों में उनकी संख्या का क्रम इस प्रकार था :

पहला ढेर	दूसरा ढेर	तीसरा ढेर
8	16+12=28	12

अब समझना आसान है कि तीलियों के प्रथम हेर-फेर के पहले (अर्थात दूसरे ढेर में जितनी तीलियाँ थीं, उतनी ही उसमें पहले ढेर से लाने के पहले) ढेरों में तीलियों की संख्या का क्रम इस प्रकार था :

पहला ढेर	दूसरा ढेर	तीसरा ढेर
22	14	12

ढेरों में तीलियों की संख्या का आरंभिक क्रम यही है।

10. इस पहेली का हल भी अंत से शुरू करना अधिक सरल होगा। हमें ज्ञात है कि **तीसरी** बार पैसों के दुगुने होने पर बटुए में 1 रूबल 20 कोपेक की राशि थी (जिसे बूढ़े ने अंतिम बार प्राप्त किया)। दुगुना होने के पहले कितने पैसे थे? 60 कोपेक। ये 60 कोपेक बूढ़े को 1 रूबल 20 कोपेक देने के बाद बचे थे, अतः बटुए में कुल राशि थी 1 रूबल 20 कोपेक + 60 कोपेक = 1 रूबल 80 कोपेक।

अब : **दूसरी** बार पैसों के दुगुने होने के बाद बटुए में. 1 रूबल 80 कोपेक की राशि थी। दुगुना होने के पहले बटुए में 90 कोपेक थे, जो बूढ़े को 1 रूबल 20 कोपेक देने के बाद बचे थे। अतः बटुए में कुल राशि 90 कोपेक + 1 रूबल 20 कोपेक = 2 रूबल 10 कोपेक

थी। पहली बार पैसों के दुगुने होने के पहले बटुए में कितने पैसे थे? 2 रूबल 10 कोपेक का आधा, अर्थात 1 रूबल 5 कोपेक। यही वह राशि है, जिससे किसान ने अपना असफल कारोबार शुरू किया था।

देखें कि उत्तर सही है या नहीं।

बटुए की राशि

पहली बार दुगुने होने पर. . . .	1 रू० 5 को० × 2 = 2 रू० 10 को०
पहली बार बूढ़े को देने पर. . .	2 रू० 10 को० — 1 रू० 20 को० = = 90 को०
दूसरी बार दुगुने होने पर. . .	90 को० × 2 = 1 रू० 80 को०
दूसरी बार बूढ़े को देनें पर . . .	1 रू० 80 को० — 1 रू० 20 को० = = 60 को०
तीसरी बार दुगुने होने पर. . .	60 को० × 2 = 1 रू० 20 को०
तीसरी बार बूढ़े को देने पर. .	1 रू० 20 को० — 1 रू० 20 को० = 0

11. आज का कैलेंडर प्राचीन रोमनों के कैलेंडर से बना है। जूलियस सीजर तक रोमन वर्ष की शुरुआत 1 जनवरी से नहीं बल्कि 1 मार्च से मानते थे। इस प्रकार उस समय दिसंबर दसवाँ महीना ही था। वर्ष की शुरुआत 1 जनवरी से मानने का निर्णय लेते समय महीनों के नामों में कोई परिवर्त्तन नहीं किया गया था। इसीलिये महीनों के नामों तथा उनकी क्रम-संख्या में असंगति पैदा हो गयी, जो अभी तक कई महीनों के नामों के साथ रह गयी है।

महीनों के नाम	नामों के अर्थ	क्रम-संख्या
सितंबर	सातवां	9
अक्टूबर	आठवां	10
नवंबर	नवां	11
दिसंबर	दसवां	12

12. सोची गयी संख्या के साथ क्या किया गया था, ध्यान से देखते जायें। सबसे पहले उसके पास वैसी ही संख्या लिख कर छः

अंकों की संख्या बना ली गयी थी। यह वही हुआ यदि उस संख्या पर तीन शून्य बैठा देते और उसमें वही संख्या जोड़ देते। उदाहरणार्थ :

$$872872 = 872000 + 872$$

संख्या के साथ दरअसल क्या किया गया था, अब अधिक स्पष्ट है : उसमें 1000 से गुणा कर दिया गया फिर गुणनफल में उसे जोड़ दिया गया। यदि संक्षेप में कहें, तो सोची गयी संख्या को 1001 से गुणा कर दिया गया।

फिर इस गुणनफल के साथ क्या किया गया? उसे क्रमानुसार 7, 11 तथा 13 से विभाजित कर दिया गया। इसका अर्थ है कि उसमें $7 \times 11 \times 13 = 1001$ से भाग दे दिया गया।

इस प्रकार, सोची गयी संख्या में 1001 से गुणा किया गया और इसके बाद गुणनफल में 1001 से भाग दे दिया गया। आश्चर्य नहीं यदि फिर वही संख्या प्राप्त हो जाती है।

* *
*

विश्राम-गृह की पहेलियों का अध्याय खत्म करने के पहले मैं आपको अंकगणित के तीन और जादू बताना चाहता हूँ, जो आप अपने मित्रों को विश्राम के क्षणों में दिखा सकेंगे। इनमें से दो की मदद से आप मन में सोची गयी संख्या भाँप सकते हैं और तीसरे की मदद से आप बता सकते हैं कि कौन सी चीज किसके पास है।

ये जादू पुराने हैं। संभव है कि आप इन्हें जानते हों, पर बहुतों को शायद ही पता होगा कि वे किस बात पर आधारित हैं। जादू के सैद्धांतिक आधार को जाने बिना उसे विश्वासपूर्वक दिखा सकना असंभव है। प्रथम दो जादुओं का आधार दिखाने के लिये आपको प्रारंभिक बीजगणित के क्षेत्र में एक बिल्कुल सहज और सरस यात्रा करनी पड़ेगी।

13. कटा हुआ अंक. आपका मित्र कोई बहुअंकी संख्या, उदाहरण के लिये 847, सोच कर रखता है। आप इसके अंकों को जोड़ने के लिये कहें : $8 + 4 + 7 = 19$। योगफल को उस संख्या से घटाने को कहें। आपके मित्र के पास बचेगा : $847 - 19 = 828$।

अब आपका मित्र बची संख्या में से कोई एक अंक काट दे – कोई भी ; कोई फर्क नहीं पड़ता – और बाकी आपको बता दे। आप फौरन वह कटा अंक बता देते हैं, हाँलाकि आप नहीं जानते कि कौनसी संख्या सोची गयी थी तथा उसके साथ कैसे क्या किया गया था।

कैसे आप यह कर सकते हैं और इस जादू का रहस्य क्या है?

यह काफी सरल है : आप कोई ऐसा अंक ढूढ़ते हैं, जो बताये गये अंकों के योग से जुड़ कर 9 की निकटतम अपवर्त्य संख्या (9 से बिना शेष विभाजित होने वाली संख्या) दे सके। उदाहरण के लिये, यदि संख्या 828 में से पहला अंक (8) काटा गया हो तथा आप को 2 और 8 अंक बताये गये हों, तो आप उन्हें जोड़ कर $8+2=10$ प्राप्त करते हैं। 9 से कटने वाली इसकी निकटतम संख्या 18 है। 8 की कमी है। यही वह अंक है, जो काटा गया था।

ऐसा क्यों होता है? किसी संख्या में से उसके अंकों के योग को घटाने पर 9 से विभाजित होने वाली संख्या ही बचती है, अर्थात बची संख्या के अंकों का योग 9 से विभाजित होगा ही। मान लें कि सोची गयी संख्या में अंक a सैकड़े के स्थान पर है, अंक b दहाई के तथा अंक c इकाई के स्थान पर हैं। मतलब कि इस संख्या को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है :

$$100a+10b+c$$

इस संख्या से उसके अंकों का योगफल $a+b+c$ घटाने पर प्राप्त होगा :

$$100a+10b+c-(a+b+c)=99a+9b=9(11a+b)$$

$9(11a+b)$ निस्संदेह 9 से विभाजित होता है। अतः किसी भी संख्या से उसके अंकों के योगफल को घटाने पर ऐसी संख्या मिलेगी, जो 9 से बिना शेष विभाजित होती है।

जादू दिखाते वक्त ऐसा भी हो सकता है कि बताये गये अंकों का योगफल स्वयं 9 से विभाजित होता है (जैसे 4 और 5)। इसका मतलब है कि काटा गया अंक 0 या 9 है। आपका उत्तर भी ऐसा ही होना चाहिये : 0 या 9।

इसी जादू का एक और बदला हुआ रूप : सोची गयी संख्या में से उसके अंकों के योगफल को घटाने की बजाय उसमें से उसके अंकों के उलट-फेर से प्राप्त कोई संख्या घटायी जा सकती है। उदाहरणार्थ, संख्या 8247 से 2748 घटायी जा सकती है (यदि उलट-फेर से प्राप्त संख्या सोची गयी संख्या से बड़ी हो, तो बड़ी में से छोटी संख्या घटाते हैं)। इसके बाद वही करते हैं, जो पहले किया गया था : $8247-2748=5499$। यदि काटा गया अंक 4 हो, तो बताये गये अंकों को जोड़ कर आप $5+9+9=23$ प्राप्त करते हैं और समझ जाते है कि अंक 4 काटा गया है, क्योंकि 23 के लिये 9 से कटने वाली निकटतम संख्या 27 है, अर्थात 23 में 4 जोड़ने पर 9 से कटने वाली निकटतम संख्या 27 प्राप्त होती है।

14. बिना कुछ पूछे संख्या भाँपना. आप अपने मित्र से तीन अंकों की कोई संख्या सोचने को कहते हैं। संख्या ऐसी होनी चाहिये कि अन्तिम अंक शून्य न हो तथा किनारे के अंकों का अंतर 2 से कम न हो। इसके बाद आप उसे इस संख्या के अंकों का क्रम उलट कर लिखने को कहते हैं। दोनों संख्याओं में से जो बड़ी हो, उसमें से वह छोटी को घटा ले। फिर, उत्तर में प्राप्त संख्या को उल्टे क्रम से लिख कर उसमें उत्तर की संख्या जोड़ने को कहते हैं और इसके बाद यह योगफल आप अपने मित्र को स्वयं बता देते हैं।

यदि सोची गयी संख्या, उदाहरण के लिये, 467 हो, तो मित्र को उसके साथ निम्न क्रियायें करनी पड़ती हैं:

$$467;\ 764;\quad \begin{array}{r} 764 \\ -467 \\ \hline 297 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 297 \\ +792 \\ \hline 1089 \end{array}$$

यही आखिरी योगफल – 1089 – आप अपने मित्र को बताते हैं। कैसे आप यह भाँपते हैं।

प्रश्न को व्यापक रूप में देखें : माना कि संख्या के अंक a, b, c हैं। c शून्य नहीं है और a तथा c का अंतर दो से कम नहीं है। संख्या को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$100a+10b+c$$

इस संख्या के क्रम को उलटने पर प्राप्त संख्या है :

$$100c + 10b + a$$

दोनों संख्याओं का अंतर है :

$$99a - 99c$$

अब इसका निम्न रूपांतरण करें : $99a - 99c = 99(a - c) =$
$= 100(a - c) - (a - c) = 100(a - c) - 100 + 100 - 10 +$
$+ 10 - a + c) = 100(a - c - 1) + 90 + (10 - a + c).$

अर्थात संख्याओं का अंतर ऐसी संख्या है, जिसमें

सैकड़े का अंक है : $a - c - 1$,
दहाई » » » : 9,
इकाई » » » : $10 + c - a$

इस संख्या के अंकों का क्रम उलट देने पर प्राप्त संख्या है :

$$100(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1)$$

यदि इन दोनों संख्याओं को जोड़ दें :

$$+\begin{array}{l}100\,(a - c - 1) + 90 + 10 + c - a \\ 100(10 + c - a) + 90 + a - c - 1,\end{array}$$

तो मिलता है : $100 \cdot 9 + 180 + 9 = 1089.$

अर्थात a,b,c कोई भी अंक हों, आपको हमेशा एक ही संख्या मिलेगी : 1089। इसीलिये उत्तर भाँपना कठिन नहीं है ; आप इसे पहले से जानते हैं।

स्पष्ट है कि एक ही व्यक्ति को यह जादू दो बार नहीं दिखाया जा सकता, अन्यथा रहस्य खुल जायेगा।

15. किसने क्या लिया? इस मनोरंजक जादू को दिखाने के लिये तीन छोटी-मोटी वस्तुएं जो आसानी से जेब में आ जाये (जैसे पेंसिल, चाबी और छूरी), तैयार रखनी चाहिये। इसके अतिरिक्त, टेबुल पर

एक तश्तरी में 24 बादाम रख दें। बादाम न हों तो तीलियों, सिक्कों आदि से भी काम चलाया जा सकता है।

तीन मित्रों को आप पेंसिल, चाबी और छूरी में से एक-एक चीज (जिसे जो पसंद हो!) आपकी अनुपस्थिति में छिपा कर अपनी जेबों में रख लेने को कहते हैं। आप ताड़ने का दावा करते हैं कि किसकी जेब में कौन-सी चीज़ है।

भाँपने की क्रिया इस प्रकार है। जब चीजें जेबों में छिपा ली गयी हों, आप कमरे में लौटते हैं और हरेक को तश्तरी में से बादाम देते हैं – एक को एक, दूसरे को दो तथा तीसरे को तीन। इसके बाद आप मित्रों को निम्न निर्देश दे कर कमरे से पुनः बाहर आ जाते हैं। आपकी अनुपस्थिति में आपके मित्र तश्तरी से और भी बादाम लें: पेंसिल छिपाने वाला मित्र उतने और बादाम ले, जितने आप ने उसे दिये थे; चाबी छिपाने वाला – जितना आप ने उसे दिया था, उसका **दुगुना**; छूरी वाला – जितना आपने उसे दिया था, उसका **चौगुना**।

बाकी बादाम तश्तरी में पड़े रहें।

जब यह सब हो चुका हो और आपको वापस लौटने का संकेत मिल जाये, तब आप कमरे में आते हैं और तश्तरी पर एक निगाह डाल कर बता देते हैं, किसकी जेब में कौन-सी चीज छिपी है!

जादू बिल्कुल चक्कर में डाल देता है, क्योंकि यह बिना किसी ऐसे सहायक के दिखाया जाता है, जो आपको चुपके-चुपके इशारे से कुछ बता सके। इसमें कोई झूठ या धोखा नहीं है: जादू पूरी तरह से गणितीय कलन पर आधारित है। आप सिर्फ तश्तरी में बचे बादामों की संख्या के आधार पर चीज छिपाने वाले को भाँपते हैं। तश्तरी में अधिक बादाम नहीं बचते; सिर्फ 1 से 7 तक बच सकते हैं और आप उन्हें सिर्फ एक निगाह में गिन सकते हैं। लेकिन बचे बादामों की संख्या से यह कैसे बताया जा सकता है कि किसने क्या लिया है?

यह बिल्कुल सरल है: मित्रों के बीच चीजों के हर वितरण के लिये तश्तरी में बचे बादामों की संख्या अलग होगी। यह अभी सिद्ध करेंगे।

माना कि आपके मित्रों के नाम हैं: कंस्टांटीन, गियोर्गी तथा व्लादीमिर। उन्हें क्रमशः क, ग और व अक्षरों द्वारा द्योतित करें।

चीजों का नामकरण भी अक्षरों में कर लें: पेंसिल – a, चाबी – b और चाकू – c। कितने प्रकार से तीन वस्तुयें तीन लोगों के बीच वितरित हो सकती हैं? छः प्रकार से:

क	ग	व
a	b	c
a	c	b
b	a	c
b	c	a
c	a	b
c	b	a

स्पष्ट है कि कोई अन्य स्थिति नहीं हो सकती; हमारी सारणी में सिलसिलेवार से सारे संभव क्रमचय निहित हैं।

अब देखें कि इन छः वितरणों के अनुरूप तश्तरी में बचे बादामों की संख्यायें क्या होती हैं:

क ग व	लिये गये बादामों की संख्या			कुल	बचे बादाम
$a\ b\ c$	$1+1=2;$	$2+4=6;$	$3+12=15$	23	1
$a\ c\ b$	$1+1=2;$	$2+8=10;$	$3+6=9$	21	3
$b\ a\ c$	$1+2=3;$	$2+2=4;$	$3+12=15$	22	2
$b\ c\ a$	$1+2=3;$	$2+8=10;$	$3+3=6$	19	5
$c\ a\ b$	$1+4=5;$	$2+2=4;$	$3+6=9$	18	6
$c\ b\ a$	$1+4=5;$	$2+4=6;$	$3+3=6$	17	7

आप देखते हैं कि बचे बदामों की संख्यायें हर वितरण के लिये अलग हैं। इसीलिये इन संख्याओं के आधार पर आप बता सकते हैं कि किसने क्या लिया है। आप तीसरी बार कमरे से बाहर निकलते हैं और अपनी पुस्तिका में देखते हैं, जिसमें आपने ऊपर की सारणी उतार रखी है। सारणी में आपको सिर्फ प्रथम तथा अन्तिम स्तम्भों की आव-

श्यकता पड़ेगी। उन्हें याद कर लेना कठिन है, पर इसकी ग्रावश्यकता भी नहीं है। यह सारणी ग्रापको बता देगी कि किसकी जेब में कौनसी चीज है। यदि, उदाहरण के लिये, तश्तरी में 5 बादाम बचे हों, तो इसका ग्रर्थ है वितरण b,c,a :

चाबी – कंस्टांटीन के पास
छूरी – गियोर्गी के पास
पेंसिल – व्लादीमिर के पास।

जादू के सफल प्रदर्शन के लिये ग्राप को ग्रच्छी तरह याद होना चाहिये कि ग्राप ने किसे कितने बादाम दिये थे। बेहतर रहेगा, यदि ग्राप नामों के ग्रकारादि क्रम से बादाम बाटेंगे, जैसा कि हमने किया है।

अध्याय 2

खेलों का गणित

डोमिनो*

16. 28 गोटियों की लड़ी. खेल के नियमों का उल्लंघन किये वगैर भी डोमिनो की 28 गोटियों को एक सतत लड़ी में क्यों रखा जा सकता है?

17. लड़ी का आरंभ और अंत. जब डोमिनो की 28 गोटियों को एक लड़ी में रखा गया, तो एक छोर पर पाँच बिंदे थे।

दूसरे छोर पर कितने बिंदे थे?

18. डोमिनो का जादू. आपका मित्र एक गोटी उठा लेता है और आपसे बाकी बचे 27 गोटियों को एक सतत लड़ी में रखने को कहता है। उसके अनुसार, चाहे जो भी गोटी उसने ली हो, यह करना संभव है। वह दूसरे कमरे में चला जाता है, ताकि आपकी बनायी लड़ी देख न सके। आप काम शुरू करते हैं और जल्द ही मान लेते हैं कि आपका मित्र सही था: 27 गोटियों को एक लड़ी में रखा जा

---

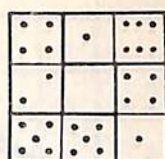
*डोमिनो 28 आयताकार गोटियों का एक खेल है। गोटी की ऊपरी सतह दो वर्गों में बँटी होती है, जिन पर विभिन्न संचयों में 0 से 6 तक के बिंदे होते हैं। खिलाड़ी बराबर संख्या में गोटियां बाँट लेते हैं और एक-दूसरे से छिपा कर रखते हैं। उनमें से प्रत्येक टेबुल पर बारी-बारी से एक-एक गोटी एक-दूसरे से सटा कर इस प्रकार रखता है कि समान संख्या के बिंदे पास हों (जैसे चित्र 8 में गोटी (2, 6) से गोटी (6, 3) सटी है)। इस प्रकार लड़ी बनती जाती है। जिसकी गोटियां पहले खत्म हो जाती हैं, वह जीत जाता है। – अनु०

सकता है। आप और भी आश्चर्यचकित होते हैं, जब आपका मित्र दूसरे कमरे से आपकी लड़ी देखे बिना बताता है कि उस के किस छोर पर कितने बिंदे हैं।

कैसे वह जान लेता है? उसे क्यों विश्वास है कि 27 गोटियों की सतत लड़ी बनायी जा सकती है?

19. फ्रेम. चित्र 5 में एक वर्गाकार फ्रेम है, जो खेल के नियमों को ध्यान में रखते हुए डोमिनो की गोटियों से बनाया गया है। फ्रेम की भुजायें बराबर हैं, पर उनमें बिंदों की कुल संख्यायें समान नहीं हैं। ऊपरी तथा निचली कतारों में से हरेक में 44 बिंदे हैं तथा अन्य दो कतारों में–59 तथा 32 बिंदे।

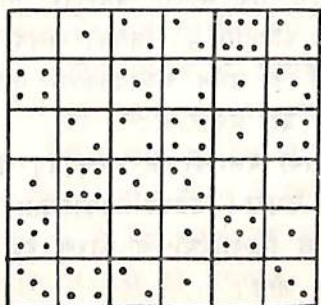
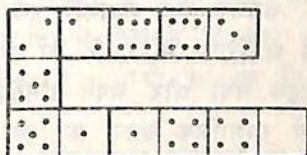
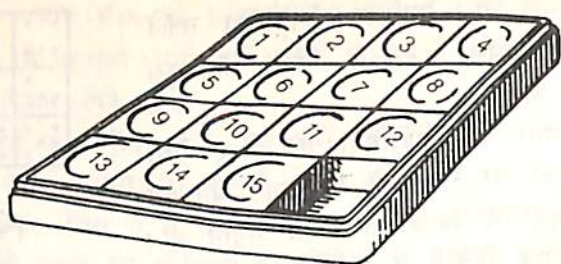
चित्र 5

क्या आप ऐसा वर्गाकार फ्रेम बना सकते हैं, जिसकी प्रत्येक भुजा में बिंदों की कुल संख्या 44 हो?

चित्र 6

20. सात वर्ग. डोमिनो की चार ऐसी गोटियाँ चुनी जा सकती हैं कि उनसे बने वर्ग की हर भुजा में बिंदों की संख्या समान हो। (नमूना आप चित्र-6 में देखते हैं: प्रत्येक भुजा में बिंदों को गिनें, कुल संख्या हर प्रकार से 11 होगी।)

क्या आप डोमिनो की सारी गोटियों को लेकर सात ऐसे वर्ग बना सकते हैं? जरूरी नहीं कि सभी वर्गों की भुजाओं में बिंदों की एक ही संख्या हो। पर्याप्त होगा यदि अलग-अलग हर वर्ग की चारों भुजाओं में बिंदों की संख्या समान हो।

21. डोमिनो से बने जादूई वर्ग. चित्र-7 में डोमिनो की 18 गोटियों से बना एक वर्ग है, जिसकी खासियत यह है कि प्रत्येक अनुलाम्बिक, अनुप्रास्थिक या विकर्णी कतार में बिंदों की संख्या एक समान है: 13। ऐसे वर्गों को प्राचीन काल से ही "जादूई" कहा जाता है।

आपसे 18 गोटियों वाले ऐसे ही कुछ वर्ग बनाने का अनुरोध किया जाता है, जिनकी कतारों में बिंदों की संख्या भिन्न हो। 18 गोटियों से बने जादूई वर्ग की कतारों में बिंदों की निम्नतम संख्या 13 है तथा अधिकतम संख्या 23 है।

चित्र 7

चित्र 8

चित्र 9. 15 का खेल

22. डोमिनो निर्मित श्रेढ़ी. चित्र-8 में आप डोमिनो की 6 गोटियाँ देखते हैं, जो खेल के नियमानुसार रखे गये हैं। फर्क सिर्फ यह है कि कतार में गोटियों पर बिंदों की संख्यायें (गोटी के दोनों अर्द्धों को मिला कर) 1 से बढ़ती हैं। कतार 4 से शुरू होती है तथा बिंदों की निम्न संख्याओं से बनती है :

4, 5, 6, 7, 8, 9

समान संख्या द्वारा बढ़ने (या घटने) वाली कतार को "समांतर श्रेढ़ी" कहते हैं। हमारी कतार में हर संख्या पिछले से 1 ज्यादा है; पर श्रेढ़ी में कोई भी दूसरा "अंतर" हो सकता है।

प्रश्न है कि छे गोटियों से कैसे ऐसी ही कुछ और श्रेढ़ियाँ बनायी जायें।

15 का खेल या टेकेन. 1 से 15 तक अंकित वर्गाकार गोटियों की विख्यात डिब्बी का एक मनोरंजक इतिहास है, जिसकी खेलने वाले शायद कल्पना भी नहीं करते। खेलों के जर्मन अध्ययनकर्त्ता गणितज्ञ वी० आरेंस के शब्दों में यह इतिहास इस प्रकार है :

"लगभग अर्ध शताब्दी पूर्व, सातवीं दशाब्दी के अन्त में, संयुक्त राज्य अमेरिका में "15 का खेल" उभरा। उसकी लोकप्रियता तेजी से बढ़ने लगी और अपने असंख्य मुग्ध खिलाड़ियों के कारण वह एक यथार्थ सामाजिक संकट का रूप लेने लगा।

"यही स्थिती सागर के इस पार, युरोप में भी देखने को मिली। यहाँ बग्गियों में भी यात्रियों के हाथ में 15 गोटियों की डिब्बियाँ देखी

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

चित्र 10

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

चित्र 11

जा सकती थीं। दफ्तरों तथा दुकानों के मालिक अपने यहाँ काम करने वालों के इस शौक से परेशान थे और काम के वक्त खेल पर सख्त मनाही लगाने को विवश हो गये थे। मनोरंजन-गृहों के मालिक इस सनक का धूर्त्ततापूर्वक उपयोग कर रहे थे और बड़ी-बड़ी प्रतियोगितायें आयोजित कर रहे थे।

खेल जर्मन-रेइखश्टाग के आनुष्ठानिक-कक्षों में भी प्रविष्ट हो गया। "वर्गाकार डिब्बियों पर टकटकी लगाये बुजुर्ग लोग मेरी आँखों के सामने आज भी घूमते हैं," – विख्यात जर्मन भुगोलशास्त्री व गणितज्ञ जिगमुण्ड ग्युंटर, जो इस महामारी के समय वहाँ डिपुटी (संसद-सदस्य) थे, यह याद करते है।

"पेरिस में इस खेल ने पहले तो खुले आकाश के नीचे बुलवारों में अपना स्थान बनाया, फिर जल्द ही कस्बों और गाँवों तक फैल गया।" सुदूर गाँवों में भी कोई ऐसा घर नहीं बचा था, जहाँ अपने शिकार को जाल में फँसा लेने की घात में यह मकड़ा न बैठा हो", – एक फ़्रांसीसी लेखक ने लिखा था।

"सन 1880 में यह रोग शायद अपने शिखर पर पहुँच गया था। लेकिन जल्द ही इस शैतान पर गणित के अस्त्र से विजय प्राप्त कर लिया गया। गणित के क्रीड़ा-सिद्धांतों ने दिखाया कि खेल के सभी प्रश्नों में से सिर्फ आधे का हल संभव है; बाकी का हल किसी भी तरीके से नहीं हो सकता।

"इससे स्पष्ट हो गया कि कुछ प्रश्न लाख कोशिशों के बावजूद क्यों हल नहीं होते थे और क्यों प्रतियोगिता के कुछ आयोजक उनके

हल के लिये बड़ी रकमों के इनाम ऐलान करने का साहस करते थे। इनाम रखने में खेल के आविष्कारक ने सबको मात कर दिया था। उसने न्यु-योर्क के एक सामाचार-पत्र के रविवारीय संस्करण के लिये एक हल न होने वाला प्रश्न दिया। हल ढूढ़ने वाले को 1000 डालर मिलने थे। चूंकि संपादक डर रहा था, आविष्कारक यह राशि अपनी जेब से देने को तैयार हो गया। आविष्कारक का नाम है सैमुएल (सैम) लायड। उसका नाम मनोरंजक प्रश्नों तथा असंख्य पहेलियों के लिये विख्यात है। मजेदार बात है कि अमेरिका में उसे इस खेल के लिये पेटेंट देने से इन्कार कर दिया गया। नियमानुसार इसके लिये उसे खेल का एक "कामगर प्रतिमान" देना था। जब उसने अधिकारियों के समक्ष खेल का एक प्रश्न रखा, तो उन्हों ने पूछा कि हल संभव है या नहीं। लायड को मानना पड़ा कि गणित के दृष्टिकोण से इसका हल नहीं है।" इस स्थिति में, – उसे उत्तर मिला, – कोई कामगर प्रतिमान नहीं बन सकता और बिना प्रतिमान के पेटेंट नहीं दिया जाता।" लायड इस निर्णय से संतुष्ट हो गया, पर यदि वह पहले जानता कि उसका आविष्कार इतना लोकप्रिय हो जायेगा, वह और भी कोशिश करता।"

खेल के इतिहास के बारे में कुछ तथ्यों को आविष्कारक के शब्दों में प्रस्तुत करते हैं :

"पहेलियों के देश में अर्से से जीने वालों को याद होगा – लायड लिखता है, – कि कैसे सातवीं दशाब्दी के आरंभ में मैंने "15 के खेल" नाम से विख्यात गोटियों की डिब्बी पर सारी दुनिया को सर खपाने के लिये विवश कर दिया था। वर्गाकार डिब्बी में 15 गोटियां सही क्रम में रखी थीं, सिर्फ 14-वीं व 15-वीं गोटियां उल्टे क्रम से रखी हुई थीं (चित्र 11)। समस्या थी : सिलसिले से एक-एक गोटी को खिसका कर उन्हें सही क्रम में रखना, ताकि आखिरी दो गोटियां भी सीधे क्रम में आ जायें।

प्रश्न के सही हल के लिये 1000 डालर का इनाम किसी को नहीं मिला, यद्यपि सभी अथक प्रयत्न में लीन थे। कई मजेदार किस्से सुनने को मिले, जैसे दुकानदार इसके चलते अपनी दुकान खोलना भूल जाते थे, कई सम्मानीय प्राधिकारी सड़क पर रोशनी के नीचे उत्तर की खोज में सारी रातें बिता दिया करते थे। कोई भी अपनी कोशिश

चित्र 12. "...किस्सा आदरणीय अधिकारियों का, जो रात-रात भर बिजली-खंभों के नीचे रोशनी में मशगूल रहते थे..."

रोकने को तैयार न था, क्योंकि सभी को सफलता में पूरा विश्वास था। कहते हैं कि जहाजरान इस खेल के चलते जहाजों को छीछले पर बैठा देते थे, इंजन-चालक रेलगाड़ियों को स्टेशन पर रोकना भूल जाते थे और किसान प्रश्न के हल के पीछे अपना हल-बैल छोड़ देते थे।"

* *
*

इस खेल के सिद्धांत से पाठकों का एक सरल परिचय कराते हैं। अपने पूर्ण रूप में वह उच्च बीजगणित के एक अध्याय–निश्चायक-सिद्धांत– से संबंधित है। यहाँ हम सिर्फ वी० आरेंस के कुछ विचारों को प्रस्तुत करते हैं।

"खेल का नियम साधारणतया इस प्रकार है: खाली जगहों पर एक-एक कर 15 गोटियों को खिसकाते हुए उन्हें किसी दिये क्रम से साधारण क्रम में लाया जाता है। साधारण क्रम 1 से 15 तक की संख्या का क्रम है। ऊपर के बायें कोने में 1 का स्थान है, उसके दायें–2 का, फिर 3 का और ऊपर के दाहिने कोने में 4 का। इसके

नीचे की कतार में बायें से दायें क्रमश: 5,6,7,8 के स्थान होते हैं। इस प्रकार का साधारण क्रम चित्र-10 में दिखाया गया है।

"अब ऐसी स्थिति की कल्पना कीजिये, जब गोटियों का क्रम पूर्ण रूप से बिगड़ा हुआ हो। गोटियों को खिसका-खिसका कर गोटी 1 को अपनी जगह पर लाया जा सकता है।

इसी तरह, गोटी 1 को छूये बिना, गोटी 2 को अपनी जगह पर लाया जा सकता है। इसके बाद गोटियों 1 व 2 को छूये बिना गोटियों 3 व 4 को अपनी जगह पर लाया जाता है: यदि संयोगवश वे अंतिम दो स्तंभों में नहीं हैं, तो गोटियों को खिसका कर उन्हें आसानी से इस क्षेत्र में लाया जा सकता है और लक्ष्य तक पहुँचा जा सकता है। अब ऊपरी कतार 1,2,3,4 सही हो चुकी है और आगे के प्रयत्नों में उसे नहीं छूते हैं। इसी तरह दूसरी कतार 5,6,7,8 का क्रम ठीक किया जा सकता है; आप देख ले सकते हैं कि यह हमेशा संभव है। इसके बाद आखिरी दो कतारों में 9 तथा 13 गोटियों को अपनी जगह पर लाते हैं; यह भी हमेशा संभव है। अपनी जगह पर लायी गयी गोटियों 1,2,3,4,5,6,7,8,9,13 को फिर अपनी जगह से नहीं हटाते। अब 6 जगहें बचती हैं, जिनमें एक खाली है तथा 5 जगहों पर 10,11,12,14,15 गोटियाँ किसी अनिश्चित क्रम में हैं। इन छे जगहों की सीमा में 10,11,12 को हमेशा अपनी जगह पर रखा जा सकता है। उन्हें रख लेने के बाद 14 व 15 गोटियों को या तो सही क्रम में रखा जा सकता है या उल्टे क्रम में (चित्र 11)। पाठक खुद देख सकते हैं कि इससे हम निम्न निष्कर्ष पर पहुँचते हैं:

"गोटियों की किसी भी आरंभिक क्रम-व्यवस्था का या तो चित्र-10 की भाँति पुनरायोजन किया जा सकता है (क्रम-I) या चित्र 11 की भाँति (क्रम-II)।

यदि कोई क्रम-व्यवस्था, संक्षेपण के लिये उसे S कहें, क्रम-I पर लायी जा सकती है, तो उल्टा उसे I से S पर भी लाया जा सकता है, क्यों कि सभी चालें वापस ली जा सकती हैं। उदाहरण के लिये, क्रम-I में यदि हम गोटी 12 को खाली जगह पर ला सकते हैं, तो उसे उल्टा खिसका कर वापस भी रख सकते हैं।

"इस प्रकार, हमारे पास कुल दो प्रकार की क्रम-व्यवस्थायें हैं:

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

चित्र 13

4	8	12	
3	7	11	15
2	6	10	14
1	5	9	13

चित्र 14

एक को हम साधारण क्रम-I की तरह रख सकते हैं तथा दूसरी को सिर्फ क्रम-II की तरह। इसके विपरीत, क्रम-I से पहली प्रकार की क्रम-व्यवस्थायें आयोजित की जा सकती है तथा क्रम-II से सिर्फ दूसरी प्रकार की। और अन्त में, एक ही प्रकार की दो भिन्न क्रम-व्यवस्थाओं को एक-दूसरे की भाँति आयोजित किया जा सकता है।

"क्या किसी प्रयत्न से इन दो क्रमों – I तथा II – को मिलाया नहीं जा सकता? विस्तार में हम नहीं जायेंगे, पर सही-सही सिद्ध किया जा सकता है कि ये दोनों क्रम चालों की किसी भी संख्या से एक दूसरे में परिवर्तित नहीं हो सकते। इसीलिये गोटियों के अपार क्रमचयों को दो समूहों में बाँटा जाता है: 1) वे, जो सही क्रम I में परिवर्तित किये जा सकते हैं: इन क्रमचयों को हल किया जा सकता है, तथा 2) वे, जो क्रम-II में परिवर्तित हो सकते हैं और इसीलिये किसी भी हालत में सही क्रम में नहीं लाये जा सकते: ये ही वे क्रमचय हैं, जिनके हल के लिये बड़े इनामों की घोषणा की जाती थी।

"कैसे जाना जा सकता है कि किसी दिये गये क्रमचय का स्थान पहले समूह में है या दूसरे समूह में? यह एक उदाहरण द्वारा समझा जा सकता है।

"निम्न प्रकार का एक क्रमचय देखा जाये।

"प्रथम तथा द्वितीय कतारों में गोटियाँ सही रखी हैं; सिर्फ गोटी 9 गोटी 8 की जगह पर है, अर्थात 9 पहले आता है 8 के: सही क्रम में यह हेर-फेर "अतिक्रमण" कहलाता है। गोटी 9 के बारे में कहते हैं कि यहाँ 1 अतिक्रमण है। इसके बाद की गोटियों में 14 अपनी जगह पर

नहीं है; वह अपने सही स्थान से तीन घर (12,13,11 गोटियों के) पहले है, अतः यहाँ तीन अतिक्रमण हैं (12 के पहले 14; 13 के पहले 14; 11 के पहले 14)। इस प्रकार कुल अतिक्रमण $1+3=4$ होते हैं। इसके अतिरिक्त 12-वीं गोटी 11-वी गोटी के पहले है तथा गोटी 13 गोटी 11 के पहले है। अतः हमें दो और अतिक्रमण मिलते हैं। अतिक्रमणों की कुल संख्या 6 हुई। इसी विधि से पहले नीचे के दाहिने कोने को खाली कर गोटियों की किसी भी क्रमव्यवस्था के लिये अतिक्रमणों की कुल संख्या को ढूंढ़ा जा सकता है। यदि यह संख्या **सम** है, तो ी हुई क्रम-व्यवस्था को सही क्रम-I पर लाया जा सकता है, अर्थात उसका हल ढूंढ़ा जा सकता है। यदि अतिक्रमणों की संख्या **विषम** है, तो क्रम-व्यवस्था दूसरे समूह की है, अर्थात उसका हल नहीं है (शून्य अतिक्रमण को सम संख्या वाला अतिक्रमण माना जाता है)।

"गणित द्वारा इस स्पष्टीकरण के कारण खेल के पीछे पहले जैसी सनक अब अर्थहीन हो गयी है। गणित इस खेल के लिये पर्याप्त विस्तृत सिद्धांत प्रस्तुत करता है, जो संदेह के लिये कोई गुंजाईश नहीं छोड़ता। यह खेल संयोग पर या खिलाड़ी की अक्लमंदी पर निर्भर नहीं करता, जैसा कि दूसरे खेलों में होता है। सिर्फ शुद्ध गणितीय तथ्य हैं, जो पूर्ण वैधता के साथ खेल का पूर्व निर्धारण करते हैं।"

अब इस क्षेत्र के कुछ प्रश्नों को देखें।

खेल के आविष्कारक द्वारा निर्मित कुछ प्रश्न यहाँ दिये जाते हैं, जिनके हल संभव हैं:

23. लायड का पहला प्रश्न. चित्र 11 में दी गयी गोटियों की क्रम-व्यवस्था को सही क्रम में परिवर्तित करें। अंत में बायीं ओर का ऊपरी कोना खाली होना चाहिये (चित्र 13)।

24. लायड का दूसरा प्रश्न. चित्र 11 में दी गयी क्रम-व्यवस्था के साथ डिब्बी को चौथाई घुमा कर गोटियों को खिसकायें, जबतक कि चित्र 14 की क्रम-व्यवस्था न मिल जाय।

25. लायड का तीसरा प्रश्न. चित्र-11 की क्रम-व्यवस्था से खेल के नियमानुसार गोटियों को खिसका-खिसका कर डिब्बी को जादूई वर्ग में परिवर्तित कर दें, ताकी हर दिशा में गोटियों की संख्याओं का योग 30 हो।

डोमिनो और 15 के खेल के प्रश्नों का अध्ययन करते समय हम सिर्फ अंकगणित के दायरे में थे। क्रौकेट के मैदान से संबंधित पहेलियों को शुरू करने पर हम आंशिक तौर से रेखागणित के क्षेत्र में भी आ जाते हैं।

क्रौकेट-खिलाड़ियों के लिये निम्न पाँच पहेलियाँ प्रस्तुत हैं।

26. गोल पार करें या क्रोकिंग करें? क्रौकेट के गोल-पोस्ट तार से बने आयताकार होते हैं। गोल की चौड़ाई गेंद के व्यास से दुगुनी है। इस हालत में क्या आसान होगा: इष्टतम स्थान से तार को स्पर्श किये बिना गोल से निर्बाध गेंद पार कराना या उसी दूरी से (दूसरी) गेंद पर चोट करना (क्रोकिंग करना)?

27. गेंद और खंभा. क्रोकेट का खंभा नीचे से 6 से० मी० मोटा है। गेंद का व्यास 10 से० मी० है। किसी दूरी से इस खूंटे में चोट करने ("खूंटा चढ़ने"!) की अपेक्षा गेंद पर चोट करना कितना सरल होगा?

28. गोल पार करें या खूंटा चढ़ें? आयताकार गोल-पोस्ट से गेंद दुगुना छोटा है और खूंटे से दुगुना चौड़ा है। क्या आसान होगा: किसी इष्टतम स्थान से गोल पार कराना या उसी दूरी से खूंटा चढ़ना?

29. चूहेदानी पार करें या क्रोकिंग करें? आयताकार गोल की चौड़ाई गेंद के व्यास से तिगुनी अधिक है। क्या आसान होगा: इष्टतम स्थान से चूहेदानी पार करना या क्रोकिंग करना?

30. दुर्गम चूहेदानी. आयताकार गोल-पोस्ट की चौड़ाई तथा गेंद के व्यास की लंबाई के किस अनुपात पर चूहेदानी पार करना असंभव हो जायेगा?

16–30 पहेलियों के हल

16. समस्या को आसान बनाने के लिये पहले समान बिंदों वाली 0—0, 1—1, 2—2 आदि 7 गोटियों को अलग रख दें। बचेंगी 21 गोटियाँ, जिन पर बिंदों की हर संख्या 6 बार मिलती हैं। उदाहरण के लिये, 4 बिंदे (गोटी के एक अर्द्ध में) निम्न 6 गोटियों पर मिलेंगे:

4—0, 4—1, 4—2, 4—3, 4—5, 4—6.

इस प्रकार बिंदों की हर संख्या सम संख्या बार मिलता है। स्पष्ट है कि समान बिंदों वाले अर्द्धों को सटा कर इन सारी गोटियों को एक के बाद एक लड़ी में रखा जा सकता है। यह कर लेने के बाद, अर्थात 21 गोटियों की एक सतत लड़ी बना लेने के बाद, 0—0, 1—1, 2—2 आदि जोड़ो के बीच लड़ी तोड़ कर सात गोटियाँ क्रमशः घुसा कर रख देते हैं। इस प्रकार, खेल के नियमों का उल्लंघन किये बगैर डोमिनो की 28 गोटियों को एक सतत लड़ी में जोड़ा जा सकता है।

17. यह सिद्ध करना आसान है कि डोमिनो की 28 गोटियों से बनी लड़ी के दोनों छोरों पर बिंदों की संख्यायें समान होंगी। अगर ऐसा नहीं होता, तो छोरों पर स्थित बिंदों की संख्यायें **विषम** संख्या बार मिलतीं (लड़ी के भीतर बिंदों की सभी संख्यायें सम बार ही मिल सकती हैं!); पर हम जानते हैं कि डोमिनो की सारी गोटियों को जमा कर लेने पर बिंदों की हर संख्या 8 बार, अर्थात सम संख्या बार दुहरायी जाती है। अतः हमारी यह मान्यता – कि लड़ी के छोरों पर बिंदों की संख्यायें भिन्न हैं – गलत होगी : वे सिर्फ समान हो सकती हैं। (गणित में इस प्रकार के तर्क को "विपरीत से सिद्धी" कहते हैं।)

अभी-अभी सिद्ध किये गये गुण से एक मनोरंजक निष्कर्ष निकलता है : 28 गोटियों की लड़ी के छोरों को मिला कर हमेशा ही एक घेरा बना दिया जा सकता है। डोमिनो की सभी गोटियों से खेल के नियमों का पालन करते हुए सिर्फ लड़ियाँ ही नहीं, बल्कि बन्द घेरे भी बनाये जा सकते हैं।

पाठक शायद इस प्रश्न में रूचि ले : कितनी भिन्न विधियों से इस प्रकार की लड़ी या घेरा बनाया जा सकता है? यहाँ कलन के नीरस विस्तार को छोड़ कर यह बता दें कि 28 गोटियों की लड़ियाँ या घेरे बनाने की विधियों की संख्या बहुत बड़ी है : 7 ट्रिलियन (70 खरब) से अधिक। यह रही उनकी सही संख्या :

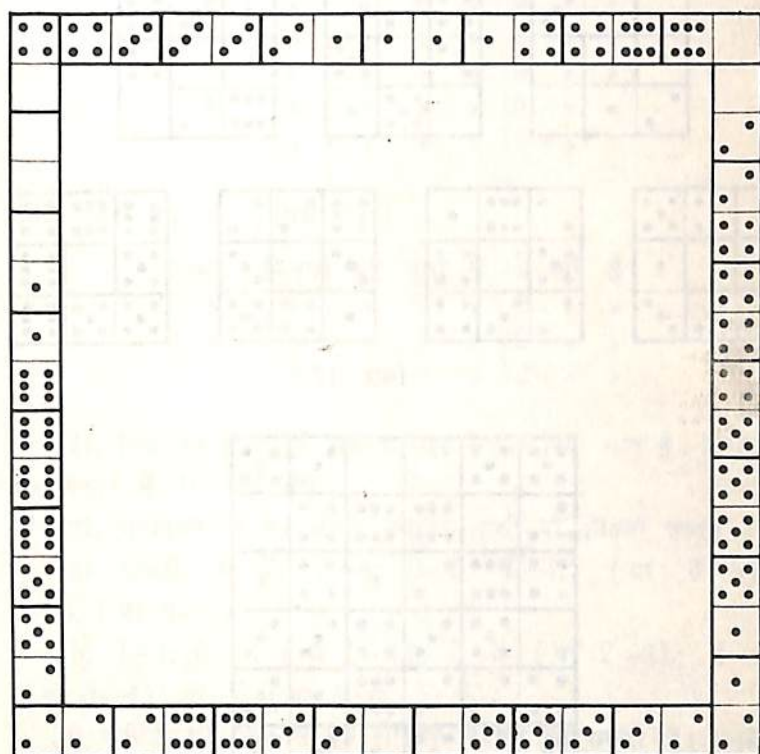
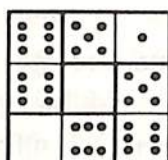
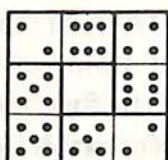
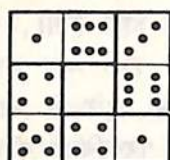
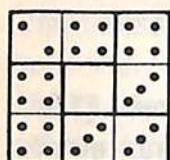
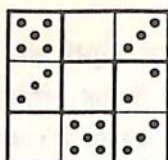
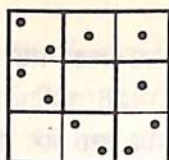
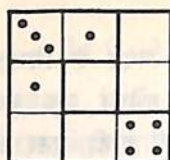
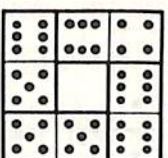
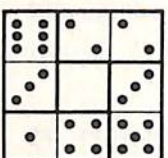
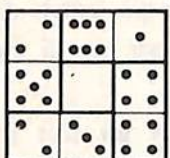
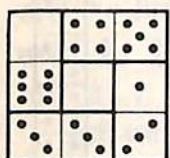
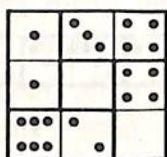
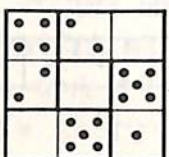
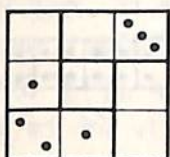
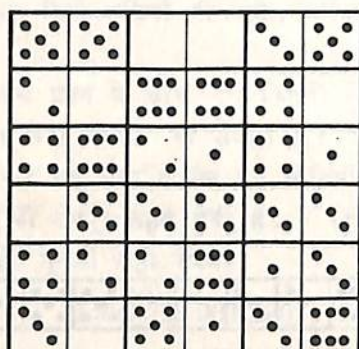
7 959 229 931 520

(यह संख्या निम्न गुणकों का गुणनफल है : $2^{13} \cdot 3^{8} \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4231$)।

18. इस पहेली का हल उपरोक्त बातों की मदद से मिलता है। हम जानते हैं कि डोमिनो की 28 गोटियों से हमेशा एक बंद घेरा बनाया जा सकता है। अतः यदि इस घेरे से एक गोटी उठा लें, तो

1) बाँकी 27 गोटियाँ खुले छोरों वाली एक सतत लड़ी बनायेंगी ;

2) छोरों पर बिन्दों की संख्यायें वही होंगी, जो उठायी गयी गोटी पर हैं।

इसीलिये एक गोटी छिपा कर हम पहले से बता सकते हैं कि बाँकी 27 गोटियों की लड़ी के छोरों पर बिंदों की कौनसी संख्यायें होंगी।

चित्र 15

चित्र 16

चित्र 17

चित्र 18

19. इष्ट वर्ग की सभी भुजाओं पर बिंदों की कुल संख्या $44 \times 4 = 176$ होनी चाहिये, पर यह संख्या डोमिनो की सभी गोटियों पर के बिंदों की कुल संख्या 168 से 8 अधिक है। इसका कारण है कि वर्ग के शीर्षों पर के बिंदे दो बार गिनती में आते हैं। इससे पता चलता है कि वर्ग के शीर्षों पर बिंदों की कुल संख्या 8 होनी चाहिये। यह समस्या को कुछ आसान बना देता है, फिर भी ऐसा वर्ग बनाना काफ़ी जटिल है। उत्तर चित्र 15 में दिया गया है।

20. इस प्रश्न के अनेक संभव संधानों में से हम दो हल दे रहे हैं। पहले हल (चित्र 16) में हैं:

1 वर्ग, जिसकी हर भुजा में 3 बिंदे हैं
1 » » » » » 6 » »
1 » » » » » 8 » »
2 » » » » » 9 » »
1 » » » » » 10 » »
1 » » » » » 16 » »

और दूसरे हल में (चित्र 17)

2 वर्ग, जिसकी हर भुजा में 4 बिंदे हैं
1 » » » » » 8 » »
2 » » » » » 10 » »
2 » » » » » 12 » »

21. चित्र 18 में जादूई वर्ग का एक नमूना दिया गया है, जिसकी हर कतार में 18 बिंदे हैं।

22. उदाहरण के रूप में 2 समातंर वाली दो श्रेढ़ियाँ प्रस्तुत हैं:

a) 0—0; 0—2; 0—4; 0—6; 4—4; (या 3—5); 5—5 (या 4—6)

b) 0—1; 0—3; (या 1—2); 0—5 (या 2—3); 1—6 (या 3—4); 3—6 (या 4—5; 5—6);

6 गोटियों की मदद से 23 श्रेढ़ियाँ बनायी जा सकती हैं। उनकी पहली गोटियाँ निम्न होंगी:

a) एक समांतर वाली श्रेढ़ियों के लिये:

0—0 1—1 2—1 2—2 3—2
0—1 2—0 3—0 3—1 2—4
1—0 0—3 0—4 1—4 3—5
0—2 1—2 1—3 2—3 3—4

b) दो समांतर वाली श्रेढ़ियों के लिये ;

0—0; 0—2; 0—1

23. आरंभिक क्रम-व्यवस्था से इष्ट क्रम निम्न 44 चालों में प्राप्त किया जा सकता है :

14, 11, 12, 8, 7, 6, 10, 12, 8, 7,
4, 3, 6, 4, 7, 14, 11, 15, 13, 9,
12, 8, 4, 10, 8, 4, 14, 11, 15, 13,
9, 12, 4, 8, 5, 4, 8, 9, 13, 14,
10, 6, 2, 1.

24. इष्ट क्रम-व्यवस्था निम्न 39 चालों में प्राप्त की जाती है :

14, 15, 10, 6, 7, 11, 15, 10, 13, 9,
5, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 15, 10, 13,
9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 15, 14,
13, 9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12.

25. 30 योगफल वाला जादूई वर्ग निम्न चालों में प्राप्त किया जाता है :

12, 8, 4. 3, 2, 6, 10, 9, 13, 15,
14, 12, 8, 4, 7, 10, 9, 14, 12, 8,
4, 7, 10, 9, 6, 2, 3, 10, 9, 6,
5, 1, 2, 3, 6, 5, 3, 2, 1, 13,
14, 3, 2, 1, 13, 14, 3, 12, 15, 3.

26. अनुभवी खिलाड़ी भी शायद यही कहेगा कि दी गयी स्थिति में क्रोकिंग की अपेक्षा गोल पार कराना अधिक आसान है, क्योंकि गोल-पोस्ट गेंद से दुगुना चौड़ा है। पर यह सोचना गलत होगा। गोल

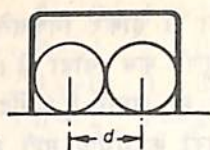
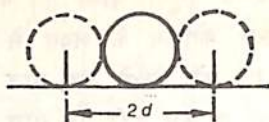
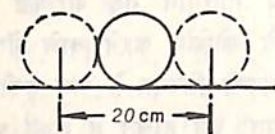
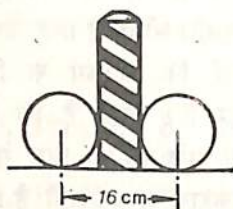
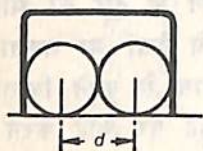
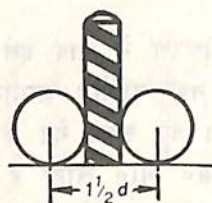
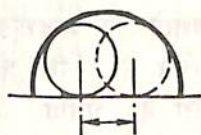
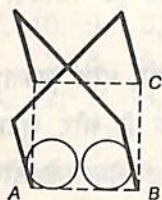
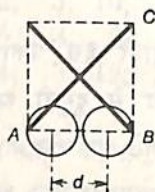
निस्संदेह गेंद से दुगुना चौड़ा है, पर गोल से होकर निकलने के लिये निर्बाध रास्ता क्रोकिंग के लक्ष्य से दो गुणा कम चौड़ा है।

चित्र 19 को देखने पर बात स्पष्ट हो जाती है। गेंद का केंद्र अपनी त्रिज्या से कम दूरी पर गोल के तारों के समीप नहीं आ सकता, अन्यथा गेंद तारों को स्पर्श करेगा। अर्थात गेंद के केंद्र का लक्ष्य गोल की चौड़ाई से दो त्रिज्या कम है। अतः हमारे प्रश्न की शर्तों के अनुसार इष्टतम स्थान से भी गोल पार करने के लिये गेंद का लक्ष्य गेंद के व्यास इतना ही चौड़ा है।

अब देखें कि क्रोकिंग के लिये गतिमान गेंद के केंद्र का लक्ष्य कितना चौड़ा है। स्पष्ट है कि यदि क्रोकिंग करने वाले गेंद का केंद्र क्रोकिंग होने वाले गेंद के पास से अपनी त्रिज्या से कम दूरी पर गुज-रेगा, तो टकराव अवश्यंभावी है। अतः इस हालत में लक्ष्य का विस्तार, जैसा कि चित्र-20 में दिखाया गया है, गेंद के दो व्यासों के बराबर है।

इस प्रकार, खिलाड़ियों के कहने के बावजूद, दी गयी स्थिति में इष्टतम स्थान से भी गोल पार कराने की अपेक्षा क्रोकिंग करना दुगुना सहज है।

27. ऊपर के स्पष्टीकरण के बाद इस प्रश्न के हल को अधिक समझाने की आवश्यकता नहीं पड़ेगी। आसानी से देखा जा सकता है (चित्र 21) कि क्रोकिंग का लक्ष्य गेंद के व्यास से दुगुने विस्तार वाला है, अर्थात 20 से० मी० चौड़ा है। खूंटे पर चोट करने के लिये लक्ष्य का विस्तार खूंटे तथा गेंद के व्यासों के योग के बराबर, अर्थात् 16 से० मी० होगा। अतः खूंटा चढ़ने की अपेक्षा क्रोकिंग करना $20:16=1\frac{1}{4}$ गुना या सिर्फ 25% अधिक सहज होगा। खिलाड़ी अक्सर क्रोकिंग की अपेक्षा खूंटे पर चोट की संभावना को अधिक मानते हैं।

28. कोई खिलाड़ी इस प्रकार भी सोच सकता है: यदि गोल-पोस्ट की चौड़ाई गेंद से दुगुनी अधिक है और खूंटा गेंद से दो गुना कम चौड़ा है, तो खूंटे पर चोट करने के लक्ष्य से गोल पार कराने का लक्ष्य चौगुने विस्तार वाला है। पिछले प्रश्नों को समझ लेने के बाद पाठक ऐसी गलतियां नहीं करेगा। वह समझ लेगा कि खूंटे पर निशाना

चित्र 19 चित्र 20

चित्र 21 चित्र 22

चित्र 23 चित्र 24 चित्र 25

चित्र 26 चित्र 27

लगाने के लिये लक्ष्य इष्टतम स्थान से गोल पार कराने के लक्ष्य से $1\frac{1}{2}$ गुना अधिक चौड़ा है। यह चित्र 23 तथा 24 को देखने से स्पष्ट हो जाता है।

(यदि गोल-पोस्ट का आकार आयत सा नहीं, बल्कि मेहराब सा होता, तो निर्बाध पार करने के लिये गेंद को और कम जगह मिलती, उसका लक्ष्य और सकुंचित होता। यह चित्र 25 से बिल्कुल स्पष्ट है।)

29. चित्र 26 व 27 में देखा जा सकता है कि गेंद के केंद्र को निर्बाध पार कराने के लिये बचा हुआ अंतराल a प्रश्न की शर्तों के अनुसार काफी संकीर्ण है। रेखागणित से परिचित लोग जानते हैं कि वर्ग की भुजा AB उसके कर्ण AC से लगभग 1.4 गुना कम होती है।

यदि गोल की चौड़ाई 3d हो (जहाँ d – गेंद का व्यास है), तो AB बराबर होगा

$$3d : 1.4 \approx 2.1d \text{ के।}$$

अंतराल a, जो इष्टतम स्थान से चूहेदानी पार करने वाले गेंद के केंद्र का लक्ष्य है, और भी सँकरा है। वह AB से पूरे एक व्यास के बराबर कम है, अर्थात्

$$a = 2.1d - d = 1.1d$$

चूंकि क्रोकिंग करने वाले गेंद का लक्ष्य, जैसा कि हम जानते हैं, 2d है, दी गयी स्थिति में चूहेदानी पार करने से क्रोकिंग करना दुगुना सरल है।

30. चूहेदानी उस स्थिति में बिल्कुल दुर्गम हो जाती है, जब गोल की चौड़ाई गेंद के व्यास के 1.4 गुना से कम हो। यह निष्कर्ष पिछले प्रश्न में समझायी गयी बातों से निकलता है। यदि गोल-पोस्ट आयताकार न हो कर मेहराबी हो, तो पार करने की स्थिति और भी बुरी हो जाती है।

अध्याय 3

दर्जन भर और पहेलियां

31. डोरी.* —और डोरी चाहिये? —माँ ने कपड़े धोने की बाल्टी से हाथ निकालते हुए पूछा। — मैं क्या डोरी का भंडार हूँ? जब देखो, डोरी की माँग! कल ही तो मैंने एक बड़ा अंटा दिया था तुम्हें। क्या करोगे इतनी डोरी का? अंटा कहाँ गया?

—अंटा कहाँ गया? —बच्चे ने उत्तर दिया—पहले तो उसका आधा तुमने खुद वापस ले लिया...

—तो मैं कपड़ों के बंडल किस चीज से बाँधती?

—बाकी का आधा टोम ने ले लिया, उसे गड़हे में मछली पकड़नी थी।

बड़े भाई को जरूर देनी चाहिये।

—मैंने दे भी दिया। थोड़ा सा बचा था, उसमें से आधा पापा ने गैलिस मरम्मत करने के लिये ले लिया, जो कार के साथ दुर्घटना के वक्त उनकी हँसी से टूट गया था। इसके बाद बहन को अपने बाल बाँधने के लिये डोरी की जरूरत पड़ी और उसने बाकी का 2/5 हिस्सा ले लिया...

—और बाकी डोरी का क्या किया तुमने?

—बाकी का? 30 से० मी० ही तो बची थी। इस टुकड़ी से भी कहीं टेलीफोन बन सकता है...

डोरी शुरू में कितनी लंबी थी?

---

*यह पहेली अंग्रेज उपन्यासकार बेरी पेन द्वारा रचित है।

32. **जुराबें और दस्ताने.** एक डब्बे में 10 जोड़ियाँ भूरी जुराबें तथा 10 जोड़ियाँ काली जुराबें थीं। दूसरे डब्बे में दस जोड़े भूरे दस्ताने तथा 10 जोड़े काले दस्ताने थे। दोनों डब्बों में से कितनी जुराबें और दस्ताने निकालने काफी होंगे कि किसी एक रंग की एक जोड़ी जुराबें और एक जोड़ा दस्ताने चुने जा सकें?

33. **बालों का जीवन-काल.** आदमी के सिर पर औसतन कितने बाल होते है? गिना गया है: लगभग 150000।* यह भी निर्धारित किया गया है कि महीने में गिरने वाले बालों की औसत संख्या 3000 है।

इन तथ्यों के आधार पर एक बाल का औसत जीवन-काल कैसे निश्चित किया जा सकता है?

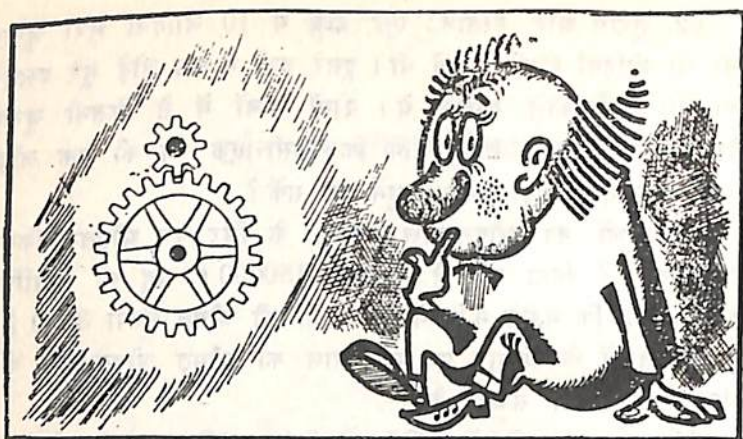
34. **तनख्वाह.** पिछले महीने ओवर-टाइम मिला कर मुझे 130 रूबल मिले। इसमें मुख्य वेतन ओवर-टाइम की भुगतान से 100 रूबल अधिक है। बिना ओवर-टाइम के मेरा वेतन कितना है?

35. **स्कीइंग.** स्की करने वाले ने हिसाब लगा कर देखा कि यदि वह 10 कि० मी० प्रति घंटे की दर से चले, तो निर्धारित स्थान पर दोपहर के एक घंटा **बाद** पहुँचेगा और यदि 15 कि० मी० प्रति घंटे चले, तो दोपहर से एक घंटा **पहले** पहुँचेगा। ठीक दोपहर को पहुँचने के लिये उसकी गति क्या होनी चाहिये?

36. **दो मजदूर.** दो मजदूर – एक जवान और एक बूढ़ा – एक ही फ्लैट में रहते हैं। जवान को घर से कारखाने तक पैदल आने में 20 मिनट लगते हैं और बूढ़े को – 30 मिनट। यदि बूढ़ा 5 मिनट पहले घर से निकल जाये, तो जवान उसे कितने मिनट बाद पकड़ लेगा?

37. **रिपोर्ट टाइप करना.** दो टाइपिस्टों को एक रिपोर्ट टाइप

---

*बहुत से लोगों को आश्चर्य होता है कि यह कैसे निर्धारित किया गया है: क्या एक-एक बाल गिनते हैं? नहीं, ऐसा नहीं करते। सिर की सतह के एक वर्ग से० मी० में कितने बाल हैं – यह गिना जाता है। प्राप्त संख्या को सिर के पूरे सतह के क्षेत्र-फल से गुणा कर दिया जाता है। यूं कहें कि शरीर-रचना के वैज्ञानिक बालों की संख्या उसी तरह निर्धारित करते हैं, जैसे वनपाल वन में पेड़ों की संख्या निर्धारित करते हैं।

चित्र 28. दंतचक्की कितने चक्कर लगायेगी?

करने के लिये दिया गया है। अधिक अनुभवी टाइपिस्ट उसे दो घंटों में टाइप कर सकती है और कम अनुभवी 3 घंटों में।

दोनों मिलकर उसे कितने समय में छापेंगे, यदि वे रिपोर्ट को आपस में इस प्रकार बाँट लें कि कम से कम समय में टाइप हो जाये।

यह प्रश्न हौज में पानी भरने से संबंधित प्रश्नों की तरह हल किया जाता है: पहले निकालते हैं कि एक घंटे में काम का कौन सा अंश हर टाइपिस्ट पूरा करती है। इन दोनों अंशों को जोड़ते हैं और योगफल से 1 में भाग दे देते है। क्या आप इसके अतिरिक्त कोई अन्य विधि सोच सकते हैं?

38. दाँतदार चक्के. 24 दाँतों वाले एक चक्के के साथ 8 दाँतों वाला एक चक्का फँसा कर इस प्रकार रखा गया है कि बड़े दंति-चक्र के घूमने पर छोटा भी घूमने लगता है। (चित्र 28)

प्रश्न है: बड़े दंति-चक्र के चारों ओर एक बार घूमने के दरमियान छोटा कितनी बार अपनी धूरी पर घूम जायेगा?

39. कितनी उम्र? पहेलियों के एक शौकीन से उसकी उम्र के बारे में पूछा गया, तो उसने बताया:

तीन साल बाद मेरी उम्र के तिगुने में से तीन साल पहले मेरी उम्र का तिगुना घटा लीजिये, आपको मेरी उम्र ज्ञात हो जायेगी।

क्या उम्र है उसकी?

40. इवानोव परिवार.–इवानोव की क्या उम्र है?

–ग्राइये सोचते हैं। 18 साल पहले उम्र में वह ग्रपने पुत्र से तिगुना बड़ा था। मुझे ग्रच्छी तरह याद है, क्योंकि उस साल जनगणना हो रही थी।

–पर मुझे जहाँ तक ज्ञात है, ग्रभी उसकी उम्र उसके बेटे की उम्र से दुगुनी है। यह क्या दूसरा पुत्र है?

–नहीं, उसे सिर्फ एक ही लड़का है ग्रौर इसीलिये उसकी उम्र निर्धारित करना कठिन नहीं होगा।

कितनी उम्र है उसकी, पाठक?

41. घोल तैयार करना. एक ग्रंशांकित ग्लास में थोड़ा नमकाम्ल है तथा दूसरे में उतना ही पानी है। घोल तैयार करने के लिये पहले ग्लास से दूसरे में 20 ग्राम ग्रम्ल डालते हैं, फिर दूसरे ग्लास में बने घोल का दो तिहाई भाग पहले ग्लास में डाल देते हैं। इसके फलस्वरूप पहले ग्लास में दूसरे ग्लास से चौगुना ग्रधिक द्रव बच जाता है। कितना पानी ग्रौर कितना ग्रम्ल शुरू में लिया गया था?

42. खरीददारी. जब मैं सामान खरीदने के लिये घर से निकला, तो बटुए में रूबलों ग्रौर 20 कोपेक के सिक्कों के रूप में लगभग 15 रूबल थे। लौट कर मैंने पाया कि बटुए में एक-एक रूबलों की संख्या उतनी है, जितने पहले 20 कोपेक के सिक्के थे ग्रौर 20 कोपेक के सिक्के उतने हैं, जितने पहले रूबलों के नोट थे। जितने पैसे लेकर मैं चला था, उसका एक तिहाई बचा था।

कितने का सामान खरीदा मैं ने?

31—42 पहेलियों के हल

31. ग्राधी डोरी माँ को देने पर $\frac{1}{2}$ बचती है; भाई को देने के बाद–$\frac{1}{4}$; पिता को देने के बाद–$\frac{1}{8}$, बहन को देने के बाद–$\frac{1}{8}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{40}$। यदि 30 से० मी० पूरी लंबाई का $\frac{3}{40}$ है, तो पूरी लंबाई होगी : $30 : \frac{3}{40}=400$ से० मी० या 4 मी०।

32. तीन जुरावें निकालना काफी होगा, क्योंकि उनमें से दो हमेशा एक रंग के होंगे। दस्तानों की संख्या बताना कठिन है, क्योंकि वे सिर्फ रंगों में ही भिन्न नहीं हैं। आधे दस्ताने बाँये हाथ के लिये हैं और आधे दाये हाथ के लिये। यहाँ 21 दस्ताने निकालने पड़ेंगे। इससे कम, जैसे 20, निकालने पर हो सकता है कि सभी एक ही हाथ के लिये हैं (जैसे सिर्फ बायें हाथ के लिये 10 भूरे दस्ताने तथा 10 काले दस्ताने)।

33. सबसे अंत में वही बाल गिरेगा, जो सबसे युवा होगा, अर्थात जिसकी उम्र 1 दिन की है।

अब देखते हैं कि कब उसके गिरने की बारी आयेगी। पहले महीने में 150000 बालों में से 3 हजार बाल गिर जायेंगे, दो महीनों में 6 हजार, एक साल के दरमियान – 12 गुणा 3 हजार, अर्थात 36 हजार। चार साल से कुछ अधिक समय बीत जायेंगे जब आखिरी बालों की बारी आयेगी। इस प्रकार आदमी के सर के बालों की औसत उम्र निर्धारित की गयी है – 4 वर्षों से कुछ अधिक।

34. बहुत से लोग बिना अच्छी तरह सोचे उत्तर देते हैं: 100 रूबल। यह गलत है, क्योंकि इस हालत में वेतन ओवर-टाइम की भुगतान से सिर्फ 70 रूबल अधिक होगा।

प्रश्न इस प्रकार हल किया जाता है। हम जानते हैं कि ओवर-टाइम की भुगतान में 100 मिला देने पर मुख्य वेतन की रकम प्राप्त होती है। अतः 130 रूबल (मुख्य वेतन + ओवर-टाइम) में 100 रूबल मिला देने पर दो मुख्य वेतनों की राशि ज्ञात होती है। पर $130 + 100 = 230$। अतः बिना ओवर-टाइम के एक मुख्य वेतन की राशि 115 रूबल हुई। ओवर-टाइम का भुगतान 130 में से 115 घटाने पर 15 रूबल होता है।

उत्तर जाँचते हैं: मुख्य वेतन 115 रूबल ओवर-टाइम के भुगतान 15 रूबल से 100 रूबल अधिक है – प्रश्न की शर्त्त पूरी हो गयी।

35. प्रश्न दो दृष्टिकोणों से रोचक है। पहला, प्रश्न यह विचार उत्पन्न करता है कि इष्ट गति 10 कि० मी० तथा 15 कि० मी० प्रति घंटे की गतियों का औसत, अर्थात $12\frac{1}{2}$ कि० मी० प्रति घंटे की

है। देखना आसान है कि यह विचार गलत है। माना कि रास्ते की लंबाई a किलोमीटर है। इस दूरी को वह 15 कि० मी०/घ० की गति से $\frac{a}{15}$ घंटे में तय करेगा, 15 कि० मी०/घ० की रफ्तार से $\frac{a}{10}$ घंटे में तथा $12^1/_2$ कि० मी०/घ० की गति से $\frac{a}{12^1/_2}$ या $\frac{2a}{25}$ घंटे में। यदि हमारी मान्यतायें सही हैं, तो निम्न समीकरण सही होना चाहिये :

$$\frac{2a}{25}-\frac{a}{15}=\frac{a}{10}-\frac{2a}{25},$$

क्यों कि इनमें से प्रत्येक अंतर 1 घंटे का है। दोनों तरफ a काट देने पर :

$$\frac{2}{25}-\frac{1}{15}=\frac{1}{10}-\frac{2}{25}$$

$$\text{या} \quad \frac{4}{25}=\frac{1}{15}+\frac{1}{10};$$

अर्थात गलत समीकरण प्राप्त होता है, क्योंकि $\frac{1}{15}+\frac{1}{10}=\frac{1}{6}$ अर्थात $\frac{4}{24}$; जबकि इसे $\frac{4}{25}$ होना चाहिये था।

प्रश्न की दूसरी विशेषता यह है कि उसे बिना समीकरण की मदद लिये मुजबानी भी हल कर सकते हैं।

हम निम्न प्रकार से सोचें : स्की करने वाला यदि 15 कि० मी०/घ० की चाल से 2 घंटे अधिक चलता (अर्थात उतने समय तक, जितना 10 कि० मी०/घ० की चाल से चलता), तो वह वास्तविक दूरी से 30 कि० मी० अधिक की दूरी तय करता। चूंकी वह 1 घंटे में 5 कि० मी० अधिक चलता है, 30 कि० मी० अधिक चलने में उसे कुल 30 : 5 = 6 घंटे लगते हैं। अतः 15 कि० मी०/घं० की चाल से इष्ट स्थान पर पहुंचने में उसे 6 − 2 = 4 घंटे लगते हैं। इस से इष्ट स्थान को दूरी भी ज्ञात हो जाती है : 15 × 4 = 60 कि० मी०।

अब यह ज्ञात करना आसान है कि स्की करने वाले को किस गति से चलना चाहिये कि वह ठीक दोपहर को इष्ट स्थान पर पहुँचे, अर्थात उसे 5 घंटे चलना पड़े :

60 : 5 = 12 कि० मी०/घ०

जाँच कर आसानी से देखा जा सकता है कि उत्तर सही है।

36. प्रश्न बिना समीकरण की मदद से विभिन्न तरीकों द्वारा हल हो सकता है।

पहली विधि इस प्रकार है: जवान मजदूर 5 मिनट में रास्ते की $\frac{1}{4}$ दूरी तय करता है, बूढ़ा मजदूर $\frac{1}{6}$ दूरी तय करता है, अर्थात जवान मजदूर से $\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ दूरी कम चलता है।

यदि बूढ़ा मजदूर $^1/_6$ दूरी तय कर चुका है, तो जवान उसे

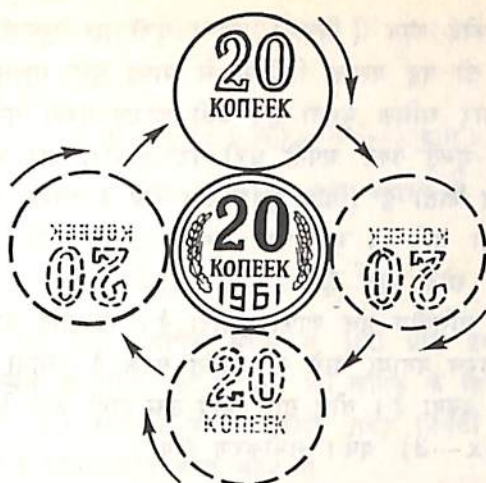
$$\frac{1}{6} : \frac{1}{12} = 2$$

पाँच-मिनटी अंतराल, अर्थात 10 मिनट में पकड़ लेगा।

दूसरी विधि और भी सरल है। पूरा रास्ता तय करने में बूढ़ा जवान से 10 मिनट अधिक व्यय करता है। यदि बूढ़ा 10 मिनट पहले निकलता तो दोनों एक साथ कारखाने पर पहुँचते। पर बूढ़ा 5 मिनट पहले निकलता है, अतः जवान उसे आधे रास्ते में, अर्थात 10 मिनट में पकड़ लेगा (जवान को पूरा रास्ता तय करने में 20 मिनट लगते हैं)।

37. समस्या का अनौपचारिक हल इस प्रकार है। पहले हम यह प्रश्न रखते हैं: दोनों टाइपिस्ट काम को आपस में किस प्रकार बाँटें कि दोनों का काम एक ही समय में खत्म हो? (स्पष्ट है कि न्यूनतम समय में काम तभी पूरा किया जा सकता है, जब दोनों में से कोई भी खाली न बैठे।) अनुभवी टाइपिस्ट दूसरी से $1^1/_2$ गुना जल्द काम करती है, अतः एक साथ काम खत्म करने के लिये अनुभवी टाइपिस्ट को $1^1/_2$ गुना अधिक काम लेना चाहिये। इससे निष्कर्ष निकलता है कि पहली को काम का $^3/_5$ भाग लेना चाहिये और दूसरी को $^2/_5$।

प्रश्न लगभग हल हो चुका है। सिर्फ यह ज्ञात कर लें कि पहली को काम का अपना $^3/_5$ हिस्सा पूरा करने में कितना समय लगाना पड़ेगा। पूरा काम वह दो घंटों में करती है, अतः $^3/_5$ काम $2 \times {}^3/_5 = 1\frac{1}{5}$ घंटे में खत्म कर लेगी। दूसरी टाइपिस्ट भी इतने ही समय में अपने हिस्से का काम खत्म करती है।

इस प्रकार, दोनों टाइपिस्टों द्वारा काम खत्म करने का न्यूनतम समय 1 घंटा 12 मिनट है।

चित्र 29. स्थिर सिक्के का चक्कर लगाते हुए दूसरा सिक्का एक बार नहीं, दो बार चक्कर खा चुकेगा।

हल की दूसरी विधि भी दी जा सकती है। पहली टाइपिस्ट 6 घंटे में 3 रिपोर्ट छाप सकती है (अर्थात रिपोर्ट के पृष्ठों से तिगुना अधिक पृष्ठ छाप सकती है) और दूसरी इसी अवधि में 2 रिपोर्ट छाप सकती है। दोनों मिलकर 6 घंटों में 5 रिपोर्ट छाप सकती हैं। अतः 1 रिपोर्ट के लिये उन्हें मिलकर 6 घंटों से पाँच गुना कम समय काम करना होगा, अर्थात उन्हें आवश्यकता है 6 घंटे : 5 = 1 घंटा 12 मिनट की।

38. यदि आप सोचते हैं कि छोटा दंति-चक्र तीन बार घूमेगा, तो आप गलत हैं: वह तीन नहीं चार चक्करें लगायेगा।

यह देखने के लिये कि क्या बात है, एक चिकने कागज पर चित्र-29 की भाँति दो समान (जैसे 20 कोपेक के) सिक्के रख लें। निचले सिक्के को उंगली से दबा कर दूसरे सिक्के को उसके किनारों पर लुढ़काते हुए घुमायें। आपको एक नयी बात का पता चलेगा: जब ऊपर का सिक्का नीचे के सिक्के के निचले किनारे को स्पर्श करेगा, वह एक पूरा चक्कर लगा चुका होगा। यह सिक्के पर संख्या 20 की स्थितियों से देखा जा सकता है। निचले सिक्के के चारों तरफ घूम लेने पर ऊपरी सिक्का दो पूरे चक्कर लगा लेगा।

जब भी कोई काय (पिण्ड) अपनी धूरी पर घूमता हुआ वृत्त पर चलता है तो वह प्रत्यक्ष विधियों से प्राप्त घूर्णन-संख्या से अपनी धूरी पर 1 बार अधिक घूमता है। इसी कारण पृथ्वी सूर्य के चारों ओर एक बार घूमते वक्त अपनी धूरी पर $365^1/_4$ बार नहीं, बल्कि 366 बार घूम जाती है (यदि घूर्णनसंख्या सूर्य के सापेक्ष नहीं, तारों के सापेक्ष गिनी जाये)। अब आप समझते है कि तारक-दिवस क्यों सूर्य-दिवसों से छोटे होते हैं।

39. अंक गणितीय हल काफी पेचीदा है। पर यदि बीजगणित की मदद से समीकरण बनाया जाये तो अत्यंत सरल है। माना कि उम्र x वर्ष है, जिसे ढूढ़ना है। तीन साल बाद उम्र होगी $x+3$ और तीन साल पहले $(x-3)$ वर्ष। समीकरण होगा :

$$3(x+3)-3(x-3)=x$$

हल करने पर $x=18$। पहेलियों के शौकीन की उम्र है 18 वर्ष।

उत्तर की जाँच करें: तीन साल बाद उसकी उम्र होगी 21 वर्ष तथा तीन साल पहले उसकी उम्र थी 15 वर्ष। उनके तिगुनों का अंतर

$$3 \cdot 21-3 \cdot 15=63-45=18$$

वर्ष हमारे पहेलियों के शौकिन की वर्त्तमान उम्र है।

40. पिछले प्रश्न की भाँति यह भी सरल समीकरण द्वारा हल होता है। यदि पुत्र की उम्र अभी x वर्ष है, तो पिता की उम्र 2x हुई। 18 वर्ष पहले दोनों की ही उम्र 18 वर्ष कम थी: पिता की उम्र थी $2x-18$ और पुत्र की $x-18$। ज्ञात है कि उस समय पिता की उम्र पुत्र की उम्र से तीन गुनी अधिक थी :

$$3(x-18)=2x-18$$

यह समीकरण हल करने पर $x=36$: पुत्र की उम्र अभी 36 वर्ष है और पिता की 72 वर्ष।

41. माना कि पहले ग्लास में x ग्राम नमकाम्ल था और दूसरे में x ग्राम पानी। पहली बार ढालने पर पहले ग्लास में $(x-20)$ ग्राम अम्ल बचता है और दूसरे में $(x+20)$ ग्राम अम्ल और पानी का

घोल। दूसरी बार ढालने पर दूसरे ग्लास में $\frac{1}{3}$ (x+20) ग्राम द्रव बचता है और पहले में

$$x-20+\frac{2}{3}(x+20)=\frac{5x-20}{3} \text{ ग्राम।}$$

ज्ञात है कि अब दूसरे ग्लास में पहले ग्लास की अपेक्षा चौगुना कम द्रव है, अतः

$$\frac{4}{3}(x+20)=\frac{5x-20}{3},$$

जिससे $x=100$। प्रत्येक ग्लास में 100 ग्राम द्रव था।

42. रूबल के नोटों को x तथा 20 कोपेक के सिक्कों को y से द्योतित करें (x और y क्रमशः नोटों तथा सिक्कों की प्रारंभिक संख्यायें हैं)। दूकान जाते वक्त बटुए में

$100x+20y$ कोपेक थे।

लौटने पर

$(100y+20x)$ कोपेक बचे।

दूसरी राशि पहली से तिगुनी कम है, अतः

$$3(100y+20x)=100x+20y$$

व्यंजन को सरल करने पर:

$$x=7y$$

यदि $y=1$, तो $x=7$। इस मान्यता के अनुसार आरंभ में मेरे पास 7 रूबल 20 कोपेक थे, जो प्रश्न की शर्त ("लगभग 15 रूबल") से काफी भिन्न है।

अब देखें $y=2$; तब $x=14$। अतः प्रारंभिक राशि 14 रूबल 40 कोपेक होती है और यह स्थिति शर्त को पूरी करती है।

$y=3$ मानें, तो रकम (21 रूबल 60 कोपेक) काफी बड़ी हो जाती है।

अतः एकमात्र उपयुक्त उत्तर है–14 रूबल 20 कोपेक। खरीद के बाद दो नोट तथा 14 सिक्के, अर्थात $200+280=480$ कोपेक बचते हैं, यह सचमुच में प्रारंभिक राशि का तिहाई है $1440:3=$ $=480$)।

खर्च की गयी राशि : $1440-480=960$ कोपेक। मतलब कि 9 रूबल 60 कोपेक का सामान खरीदा गया।

अध्याय 4

आपको गिनना आता है?

43. आपको गिनना आता है? इस प्रश्न से तीन साल से अधिक उम्र का कोई भी व्यक्ति अपमानित महसूस करेगा। क्रम से "एक", "दो", "तीन" का उच्चारण करने के लिये विशेष कला की जरूरत नहीं पड़ती। फिर भी मुझे विश्वास है कि इस आसान लगने वाले काम को हमेशा अच्छी तरह से नहीं करते। क्या गिनना है, इसपर सब निर्भर करता है। डिब्बे में पड़े काँटियों को गिनना कठिन नहीं है। लेकिन उसमें यदि काँटी के साथ पेंच भी मिले हों और उनकी संख्यायें अलग-अलग निर्धारित करनी हो, तब आप क्या करेंगे? पहले काँटी और पेंच के अलग-अलग ढेर बनायेंगे और फिर गिनेंगे?

ऐसी समस्या गृहस्थिन के सामने खड़ी होती है, जब उसे धुलाई के लिये कपड़ों की गिनती करनी पड़ती है। वह पहले अलग-अलग प्रकार के कपड़े अलग ढेरों में रखती है: कमीजें एक ढेर में, तौलिये दूसरे ढेर में, तकिये के खोल तीसरे ढेर में, आदि। और सिर्फ इस नीरस कार्य को पूरा करने के बाद वह गिनना शुरू करती है कि किस ढेर में कितने कपड़े हैं।

बस इसी को कहते हैं कि गिनना नहीं आता! क्योंकि असमान वस्तुओं की गिनती की यह विधि असुविधाजनक है, परिश्रम की है और कई हालतों में बिल्कुल असंभव है। अच्छा है, यदि आपको काँटी या कपड़े गिनने पड़ते हैं: उन्हें अलग ढेरों में जमा कर सकते हैं। लेकिन किसी वनपाल की दृष्टि से सोचिये। उसे गिनना है कि एक हेक्टर में कितने चीड़ हैं, कितने देवदारु और कितने फर वृक्ष। वृक्षों

के आप अलग-अलग ढेर नहीं बना सकते। क्या करेंगे? पहले सारे चीड़ के पेड़ गिन लेंगे, फिर देवादारु और फिर बर्च? एक हेक्टर के आपको कई चक्कर लगाने पड़ेंगे!

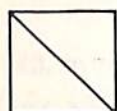
क्या कोई आसान विधि नहीं है कि एक ही चक्कर लगाना पड़े? हाँ, ऐसी एक विधि है और इसका उपयोग वनपाल पुराने जमाने से करते आ रहे हैं। काँटी और पेंचों की गिनती के उदाहरण द्वारा इस विधि को समझाता हूँ।

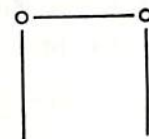
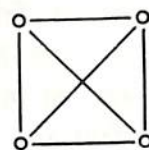
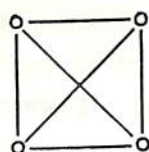
काँटियों और पेंचों को अलग ढेरों में रखे बगैर, एक बार में ही उनकी संख्यायें जानने के लिये एक कागज और पेंसिल रख लीजिये। कागज पर निम्न नमूने की सारणी बना लीजिये :

काँटी	पेंच

इसके बाद गिनना शुरू कीजिये। डिब्बे से कोई चीज निकालिये; काँटी या पेंच, जो हाथ आ जाये। यदि यह पेंच है, तो सारणी में पेंच के नीचे एक लकीर का चिह्न लगा दें और यदि यह काँटी है, तो काँटी के नीचे। अब दूसरी चीज निकालिये और उसके साथ भी यही कीजिये। यह क्रिया तबतक दुहराते जायें, जबतक कि डिब्बा खाली न हो जाये। यह काम खत्म हो जाने पर आपकी सारणी में काँटी के स्तंभ में उतनी लकीरें होंगी, जितनी डिब्बे में काँटियाँ हैं और पेंच के स्तंभ में उतनी लकीरें होंगी, जितने पेंच हैं। अब इन लकीरों को गिन कर योग लिख लेना रहता है।

लकीरों की गिनती को सरल बनाने तथा जल्द करने के लिये उन्हें एक के नीचे एक नहीं बनाते बल्कि चित्र 30 में दर्शायी आकृति में पाँच-पाँच के समूहों में बनाते हैं।

इस तरह के वर्ग जोड़ों में बनाते हैं अर्थात दस लकीरों के बाद ग्यारहवीं लकीर नीचे की दूसरी पंक्ति में डालते हैं। जब दूसरी पंक्ति

चित्र 30. पाँच-पाँच के समूहों में लकीरें बनानी चाहिये।

चित्र 31. गणना-फल इस प्रकार लिखे जाते हैं।

चित्र 32. प्रत्येक पूर्ण व र्ग संख्या 10 द्योतित करता है।

में भी दो वर्ग (दस लकीरें) हो जायें, तो तीसरी पंक्ति से शुरू करते हैं। लकीरें चित्र 31 की तरह लगेंगी।

इस प्रकार से लगायी गयी लकीरों को गिनना काफी ग्रासान है। ग्रक्सर, उदाहरण के लिये, पूर्ण वर्ग (चित्र 32) जैसी ग्राकृतियों का प्रयोग किया जाता है, जिनमें से प्रत्येक 10 द्योतित करती है। जंगल के किसी भाग में भिन्न वृक्षों की संख्या जानने के लिये सारणी में दो की जगह चार (यदि चार प्रकार के वृक्ष हों) स्तंभ बनाने पड़ेंगे ग्रौर खड़े स्तंभों की ग्रपेक्षा पड़े स्तभ, क्षैतिज कतारें ग्रधिक सुविधाजनक होंगी। गिनती के पहले सारणी का रूप चित्र 33 की भाँति होगा।

गिनती के बाद की सारणी चित्र 34 जैसी होगी।

संख्याग्रों का ग्रंतिम योग प्राप्त करना यहाँ काफी ग्रासान है :

चीड़ . . . . 53 बर्च 46
फर . . . . - 79 देवदारू 37

चीड़	
फर	
बर्च	
देवदारू	

चित्र 33. जंगल में पेड़ गिनने के लिये सारणी।

चीड़	⊠ ⊠ ⊠ ∟ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠
फर	⊠ ⊠ ⊠ ⊠ । ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠
बर्च	⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ □ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠
देवदारू	⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊔

चित्र 34. गणना के बाद सारणी का रूप।

कुकरौंधा	
अकवन	
धातूरा	
भटकोंवा	
कंटेला	

चित्र 35. मैदानी पौधों की गिनती इससे शुरू करनी चाहिये।

धुलाई के कपड़ों की सूची गृहस्थिन इसी प्रकार से बना सकती है। इससे श्रम व समय की बचत होगी।

यदि आपको किसी हरे मैदान में विभिन्न पौधों की संख्यायें ज्ञात करने की आवश्यकता पड़े, तो अब आप जानते हैं कि न्यूनतम अवधि में यह कैसे किया जाये। मैदान में पाये जाने वाले पौधों में से प्रत्येक के नाम कागज पर एक-एक स्तंभ बना लेते हैं। कुछ स्तंभ खाली छोड़

दिये जाते हैं–यह उन पौधों के लिये होंगे, जो मैदान में मिल सकते हैं, पर अभी आपको पता नहीं है। गिनती का काम आप चित्र-35 में दिखायी गयी सारणी के साथ शुरू करेंगे।

आगे का काम उसी प्रकार है, जैसे जंगल में वृक्षों को गिनने के लिये।

44 जंगल में पेड़ गिनने की क्या जरूरत है? शहरी लोगों को तो यह बिल्कुल असंभव प्रतीत होता है। ले० नि० तोल्स्तोय के "आन्ना करेनिना" उपन्यास में कृषि-ज्ञाता लेविन जंगल बेचने की इच्छा रखने वाले, पर इन बातों से अनभिज्ञ, अपने एक रिश्तेदार से पूछता है:

–"तुमने पेड़ गिने?

–"पेड़ कैसे गिनें?"–वह आश्चर्य प्रकट करता है।–"यद्यपि बालू के कण और ग्रहों से आती किरणों को विद्वान बुद्धी के लोग गिन सकते हैं..."

–"हाँ, रिबीनिन (बनिये) की विद्वान बुद्धी गिन ले सकती है। और बिना गिने कोई भी नहीं खरीदेगा।"

जंगल में पेड़ यह निर्धारित करने के लिये गिने जाते हैं कि उससे कितने घनमीटर लकड़ी प्राप्त हो सकती है। पेड़ पूरे जंगल में नहीं गिनते, बल्कि उसके एक निश्चित भाग में गिनते हैं। चौथाई या आधा हेक्टर का एक क्षेत्र चुना जाता है, जिसमें पेड़ों का घनापन, उनके प्रकार, मुटाई और ऊँचाई उस जंगल के लिये औसत हों। निस्संदेह, ऐसे क्षेत्र के चुनाव के लिये अनुभवी निगाह चाहिये। गिनते वक्त सिर्फ पेड़ों के प्रकार को ही ध्यान में नहीं रखते; यह भी देखते हैं कि विभन्न मुटाइयों (25 से० मी०, 30 से० मी०, 35 से० मी०) के कितने तने हैं। वन-विभाग द्वारा गिनती के लिये बनायी गयी सारणी में हमारी सरल सारणी की तरह सिर्फ चार स्तंभ नहीं होते, बल्कि बहुत सारे होते हैं। आप कल्पना कर सकते हैं कि यदि यहाँ बतायी गयी विधि की बजाय साधारण विधि से गिनना होता, तो कितनी बार पूरे जंगल का चक्कर लगाना पड़ता।

जैसा कि देखते हैं, गिनती सहज और सरल तभी होती है, जब समान वस्तुओं को गिनते हैं। यदि असमान वस्तुओं की संख्यायें ज्ञात करनी होती है, तो यहाँ समझायी गयी विशेष विधि का प्रयोग करते हैं, जिसके अस्तित्त्व की बहुत से लोग शायद कल्पना भी नहीं करते।

अध्याय 5

अंकों की पहेलियाँ

45. पाँच रूबल में सौ रूबल. मंच से अंकों के एक जादूगर ने दर्शकों के समक्ष एक लुभावना प्रस्ताव रखा:

– गवाहों के समक्ष घोषणा करता हूँ, जो मुझे 50. 20 और 5 कोपेक के कुल 20 सिक्कों में पाँच रूबल देगा, उसे मैं सौ रूबल दूंगा। पांच रूबल में सौ! किसे चाहिये?

चुप्पी छा गयी।

दर्शक सोच में डूब गये। डायरियों के पृष्ठों पर पेंसिलें फिसलने लगीं, पर कोई भी उठा नहीं।

– मैं देखता हूँ कि दर्शकों को पाँच रूबल में सौ का सौदा महंगा लग रहा है। मैं दो रूबल की छूट देने को तैयार हूँ और नया दाम रखता हूँ: बताये गये मूल्यों के 20 सिक्कों में 3 रूबल। 3 रूबल में 100! चाहने वाले लाइन में लग जायें।

लेकिन लाइन नहीं लग रही थी। दर्शक इस विरल अवसर का लाभ उठाने से चूक रहे थे।

– क्या तीन रूबल भी महंगा है? खैर, एक रूबल और कम कर देता हूँ; बताये गये 20 सिक्कों में दो रूबल लाइये और मैं उसी क्षण सौ रूबल दूंगा।

चूंकि कोई भी इस विनिमय के लिये सामने नहीं आ रहा था, जादूगर ने कहना जारी रखा:

– हो सकता है कि आपके पास अभी छोटे सिक्के नहीं हैं। आप

शर्मायें नहीं, मैं कर्ज दे सकता हूँ। आप सिर्फ कागज पर लिख दें कि किस मूल्य के कितने सिक्के मुझे देंगे।

46. **हजार**. क्या आप संख्या 1000 को सात समान अंकों में व्यक्त कर सकते हैं?

आपको इन अंकों के सिवा विभिन्न गणितीय क्रियाओं के चिह्नों को भी प्रयुक्त करने की छूट है।

47. **चौबीस**. संख्या 24 को तीन अङ्कों की मदद से व्यक्त करना बहुत आसान है: $8+8+8$। क्या आप इस संख्या को किसी अन्य तीन समान अंकों से व्यक्त कर सकते हैं? इस प्रश्न के कई हल है।

48. **तीस**. संख्या तीस को तीन पंजों द्वारा आसानी से व्यक्त किया जा सकता है: $5\times5+5$। किसी अन्य समान तीन अंकों द्वारा यह करना कहीं जटिल है।

कोशिश करें, शायद आपको कुछ हल मिल जायें।

49. **लुप्त अंक**. गुणन के इस उदाहरण में आधे से अधिक अंकों की जगह पर तारक-चिह्न हैं।

```
     *1*
   × 3*2
   -----
     *3*
    3*2*
  + *2*5
  ------
  1*8*30
```

क्या आप लुप्त अंकों को बता सकते हैं?

50. **कौनसी संख्यायें**. ऐसा ही एक और प्रश्न है।

दिये हुए उदाहरण में कौन सी संख्यायें आपस में गुणित हैं:

```
     **5
   × 1**
   -----
    2**5
   13*0
 + ***
  ------
   4*77*
```

51. **क्या भाज्य है?** भाग के निम्न उदाहरण में लुप्त अंकों को बतायें:

```
  *2*5*|325
 - ***  |1**
 ------
   *0**
 - *9**
 ----------
       *5*
     - *5*
 ----------
```

52. **11 से भाग**. नौ ग्रंकों की कोई ऐसी संख्या लिखें, जिसके सभी ग्रंक भिन्न हों ग्रौर जिसमें 11 से भाग देने पर शेष न बचे। ऐसी ग्रधिकतम तथा न्यूनतम संख्याग्रों को भी लिखें।

53. **ग्रजीब गुणन**. दो संख्याग्रों के निम्न गुणन को देखें:

$$48 \times 159 = 7632$$

गुणन की विशेषता यह है कि इसमें एक ही साथ सभी सार्थक ग्रंक सम्मिलित हैं।

क्या ग्राप कुछ ग्रौर ऐसे ही उदाहरण ढूंढ़ सकते हैं? यदि ग्रौर भी ऐसे उदाहरण संभव हैं, तो वे कितने हैं?

54. **संख्याग्रों का त्रिकोण**. चित्र 36 में दिये त्रिकोण के गोलों में सभी नौ सार्थक ग्रंकों को इस प्रकार लिखें कि हर भुजा में उनका योग 20 हो।

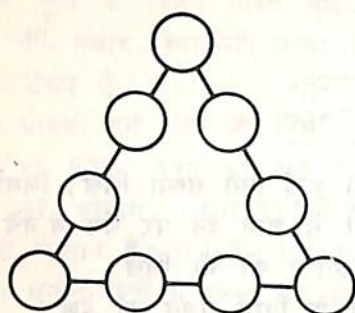
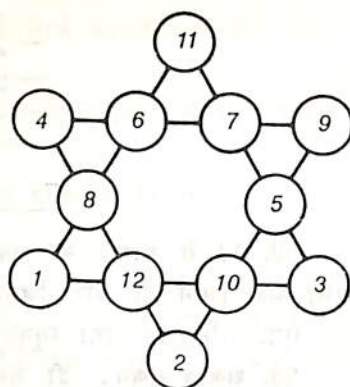
55. **संख्याग्रों का एक ग्रौर त्रिकोण**. उसी त्रिभुज (चित्र 36) के गोलों में सभी सार्थक ग्रंकों को इस प्रकार भरना है कि प्रत्येक भुजा पर उनका योग 17 हो।

56. **जादूई सितारा**. चित्र 37 में दिये छे शीर्षों वाले सितारे में "जादूई" गुण है: सभी छे कतारों में संख्याग्रों का योग समान है:

$$4+6+7+9=26 \qquad 11+6+8+1=26$$
$$4+8+12+2=26 \qquad 11+7+5+3=26$$
$$9+5+10+2=26 \qquad 1+12+10+3=26$$

लेकिन शीर्षों पर स्थित संख्याग्रों का योग दूसरा है:

$$4+11+9+3+2+1=30$$

क्या ग्राप गोलों में लिखी संख्याग्रों के स्थान में हेर-फेर कर इस संख्या-तारक को इस प्रकार नहीं सुधार सकते कि सिर्फ सीधी कतारों

चित्र 36. वृत्तों में अंकों को रखें।

चित्र 37. अंकों से बना षटकोण सितारा।

में ही संख्याओं का योग समान (26) न हो, बल्कि शीर्षों पर स्थित संख्याओं का योग भी उतना ही (26) हो?

45–56 पहेलियों के हल

45. तीनों ही प्रश्न हलातीत हैं; उनका हल असंभव है। जादूगर बिना किसी डर के कोई भी इनाम घोषित कर सकता था। यह सिद्ध करने के लिये हम बीजगणित के प्रकाश में ये प्रश्न एक-एक कर देखते हैं।

5 रूबल का भुगतान : माना कि यह अदायगी संभव है और इसके लिये 50 कोपेक के x सिक्के, 20 कोपेक के y सिक्के और 5 कोपेक के z सिक्के चाहिये। समीकरण होगा :

$$50x + 20y + 5z = 500$$

5 से काट कर मिलता है :

$$10x + 4y + z = 100$$

इसके अतिरिक्त, शर्त के मुताबिक सिक्कों की कुल संख्या 20 होनी चाहिये; अतः x, y तथा z एक और समीकरण से संबंधित हैं :

$$x + y + z = 20$$

इस समीकरण को प्रथम समीकरण से घटाकर प्राप्त करते हैं:

$$9x + 3y = 80$$

अब 3 से भाग देकर समीकरण को निम्न रूप देते हैं:

$$3x + y = 26\frac{2}{3}.$$

पर 50 के सिक्कों की आवश्यक संख्या की तिगुनी होने के कारण 3x एक पूर्ण संख्या है। 20 कोपेक के सिक्कों की संख्या y भी एक पूर्ण संख्या है। दो पूर्ण संख्याओं का योग भिन्न ($26^2/_3$) में नहीं आ सकता। हमारी मान्यता कि प्रश्न का हल संभव है, गलत निष्कर्ष दे रही है। अतः प्रश्न हलातीत है।

पाठक के समक्ष आयी दूसरे दो "सस्तेकरण" की समस्याओं को भी हलातीत सिद्ध कर सकते हैं, जिनमें 3 तथा 2 रूबल देने थे। इनमें से पहले प्रश्न से निम्न समीकरण बनता है:

$$3x + y = 13\frac{1}{3},$$

और दूसरे से

$$3x + y = 6\frac{2}{3}.$$

दोनों ही समीकरण पूर्णांकों में हलातीत हैं।

जैसा कि देखते हैं, जादूगर हल के लिये बड़े इनामों की घोषणा करके कोई खतरा नहीं मोल ले रहा था। उसे इनाम कभी देना नहीं पड़ता।

दूसरी बात होती, यदि वह उक्त मूल्यों के 20 सिक्कों में 2, 3 या 5 रूबल नहीं, बल्कि, उदाहरण के लिये, 4 रूबल देने को कहता। तब प्रश्न के कई समाधान संभव थे।*

46. $888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1000$

दूसरे हल भी हैं।

---

*एक संभव हल इस प्रकार है: 50 कोपेक के 6 सिक्के, 20 कोपेक के 2 सिक्के और 5 कोपेक के 12 सिक्के।

47. दो हल इस प्रकार हैं:

$22+2=24$; $3^3-3=24$

48. तीन हल दिये जा रहे हैं:

$6\times6-6=30$; $3^3+3=30$; $33-3=30$

49. लुप्त अंक एक-एक कर ढूढ़ते हैं। निम्न विचार-क्रम का अनुसरण करें।

सुविधा के लिये पंक्तियों का क्रमांकण करते हैं:

```
   *1* . . . . . . . . . I
 × 3*2 . . . . . . . . . II
 -----
   *3* . . . . . . . . . III
  3*2*  . . . . . . . .  IV
+*2*5  . . . . . . . . . V
------
1*8*30 . . . . . . . . . VI
```

समझना आसान है कि III पंक्ति में अंतिम तारा 0 है, क्योंकि VI पंक्ति के अंत में 0 है।

अब I पंक्ति के अंतिम तारे का मान ढूढ़ें: यह एक ऐसा अंक है, जिसमें 2 से गुणा करने पर 0 से अंत होने वाली संख्या मिलती है, तथा 3 से गुणा करने पर 5 से अंत होने वाली संख्या मिलती है (पंक्ति V)। ऐसा अंक सिर्फ 5 हो सकता है।

आगे, स्पष्ट है कि IV पंक्ति के अंत में 0 है। (III तथा VI पंक्तियों में दायें से द्वितीय अंकों की तुलना करें!)

II पंक्ति में तारे के पीछे कौन सा अंक छिपा है, यह भाँपना भी कठिन नहीं है: यह 8 है, क्योंकि सिर्फ 8 को 15 से गुणा करने पर 20 से अंत होने वाली संख्या मिलती है (IV पंक्ति)।

और अंत में स्पष्ट होता है कि I पंक्ति में प्रथम तारे की जगह कौन सा अंक है: यह 4 है, क्योंकि सिर्फ 4 में 8 से गुणा करने पर 3 से शुरू होने वाली संख्या मिलती है (पंक्ति IV)।

बाकी लुप्त अंकों का पता लगाना अब कठिन नहीं है: प्रथम दो पंक्तियों की संख्याओं को, जो अब निश्चित हो चुकी हैं, आपस में गुणा कर देने पर अन्य सभी लुप्त अंक ज्ञात हो जाते हैं।

अंत में हमें गुणन का निम्न उदाहरण प्राप्त होता है:

$$\begin{array}{r} 415 \\ \times 382 \\ \hline 830 \\ 3320 \\ +1245 \\ \hline 158530 \end{array}$$

50. पिछले प्रश्न की भाँति ही इस प्रश्न के लुप्त अंकों का पता लगाते हैं। उत्तर यह है:

$$\begin{array}{r} 325 \\ +147 \\ \hline 2275 \\ 1300 \\ +320 \\ \hline 47775 \end{array}$$

51. भाग का उदाहरण इस प्रकार है

$$\begin{array}{r|l} 52650 & 325 \\ -325 & 162 \\ \hline 2015 & \\ -1950 & \\ \hline 650 & \\ -650 & \\ \hline \end{array}$$

52. इस प्रश्न को हल करने के लिये 11 के भाज्यता-सूचक को जानना चाहिये। किसी संख्या के सम स्थानों के अंकों के योग और विषम स्थानों के अंकों के योग का अंतर यदि शून्य हो या 11 से भाज्य हो, तो संख्या 11 से भाज्य होती है। उदाहरण के लिये संख्या 23 658 904 का परीक्षण करे।

सम स्थानों पर स्थित अंकों का योग:

$$3+5+9+4=21$$

विषम स्थानों पर स्थित अंकों का योग:

$$2+6+8+0=16$$

उनका अंतर (बड़ी में से छोटी संख्या घटाते हैं)

$$21-16=5$$

यह अंतर (5) 11 से विभाजित नहीं होता, अतः दी गयी संख्या बिना शेष के 11 से विभाजित नहीं होती।

दूसरी संख्या का परीक्षण करें: 7 344 535;

$$3+4+3=10 \quad 7+4+5+5=21 \quad 21-10=11$$

चूंकि 11 से 11 विभाज्य है, तो दी गयी संख्या भी 11 से विभाज्य है।

अब आसानी से समझा जा सकता है कि नौ अंकों को किस प्रकार लिखना चाहिये कि प्रश्न की शर्त्तों को पूरा करते हुए 11 की अपवर्त्य (गुणज) संख्या प्राप्त हो जाये।

उदाहरण के लिये: 352 049 786

परीक्षण करें: $3+2+4+7+6=22$, $5+0+9+8=22$

अंतर $22-22=0$; अर्थात उपरोक्त संख्या 11 का अपवर्त्य है।

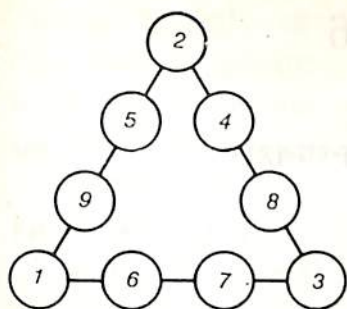
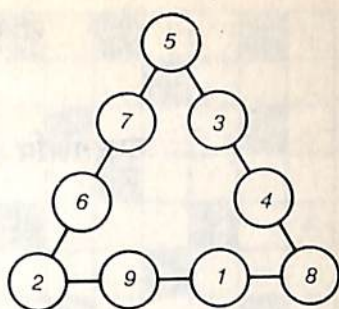
ऐसी अधिकतम सख्या 987 652 413 है। न्यूनतम संख्या होगी: 102 347 586।

53. धैर्यवान पाठक इस प्रकार के गुणन के नौ उदाहरण ढूढ़ सकता है। ये रहे वे:

$12 \times 483 = 5796$, $48 \times 159 = 7632$,
$42 \times 138 = 5796$, $28 \times 157 = 4396$,
$18 \times 297 = 5346$, $4 \times 1738 = 6952$,
$27 \times 198 = 5346$, $4 \times 1963 = 7852$.
$39 \times 186 = 7254$,

54—55. हल चित्रों 38 व 39 में दिखाये गये हैं। कतारों की भीतरी संख्याओं के आपसी स्थान बदल कर और भी नये हल दिये जा सकते हैं।

56. संख्याओं की आवश्यक स्थिति को ढूढ़ने का काम सरल बनाने के लिये हम निम्न बातों की सहायता लेंगे।

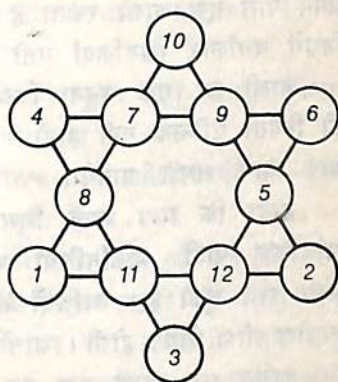
तारे के शीर्षों पर स्थित संख्याओं का योग 26 होना चाहिये और सभी संख्याओं का कुल योग 78 है। अतः भीतरी षटकोण पर की संख्याओं का योग $78-26=52$ होना चाहिये।

चित्र 38

चित्र 39

अब बड़े त्रिकोणों में से एक को देखें। उसकी हर भुजा की संख्याओं का योग 26 है। तीनों भुजाओं की सभी संख्याओं का कुल योग $26 \times 3 = 78$ है, जिसमें शीर्षों पर स्थित संख्यायें दो बार सम्मिलित हैं। और चूंकि तीनों भीतरी युग्मों की संख्याओं का योग (अर्थात भीतरी षटकोण की संख्याओं का योग) 52 के बराबर होगा, तो हर त्रिकोण के शीर्षों की संख्याओं के योग को दुगुना करने पर $78-52=$ $=26$ मिलना चाहिये, अतः स्वयं यह योग 13 होगा।

अब खोज का क्षेत्र काफी संकुचित हो जाता है। हमें ज्ञात है कि तारे के शीर्षों पर 12 और 11 संख्याये नहीं रखी जा सकतीं (क्यों?)। अतः परीक्षण सिर्फ 10 से शुरू करना चाहिये। इस हालत में हमें तुरत ज्ञात हो जाता है कि त्रिकोण के अन्य दो शीर्षों पर कौन सी संख्यायें होंगी: 1 और 2।

इसी प्रकार धीरे-धीरे आगे बढ़ते हुए स्थिति ढूढ़ ली जा सकती है। चित्र 40 में हम यह स्थिति दिखा रहे हैं।

चित्र 40

अध्याय 6

गुप्त-लिपि में पत्र-व्यवहार

57. जाली. भूमिगत क्रांतिकारीयों को अपने कागजात और त्र इस प्रकार लिखने पड़ते हैं कि कोई दूसरा उसे पढ़ कर कुछ समझ न पाये। इसके लिये लेखन की विशेष विधियाँ हैं, जिसे गुप्त-लेखन (या "क्रिप्टोग्राफी") कहते हैं। गुप्त-लेखन की भिन्न प्रणालियाँ बनायी गयी हैं। इनका सहारा सिर्फ भूमिगत क्रांतिकारी ही नहीं लेते। कूटनीतिज्ञ और सैनिक अधिकारी भी राज्य की गोपनीय बातों को गुप्त रखने के लिये इनका उपयोग करते हैं। यहाँ हम गुप्त लेखन की एक विधि बताने जा रहे हैं, जिसे "जाली" की विधि कहते हैं। यह अपेक्षाकृत सरल विधि है और अंकगणित से निकट का संबंध रखती है।

इस विधि से पत्र-व्यवहार करने की इच्छा रखने वालों में से हरेक अपने पास एक जाली रखता है। जाली कागज का बना वर्ग होता है, जिसमें वर्गाकार खिड़कियाँ बनी होती हैं।

जाली का एक नमूना चित्र 41 में दिया गया है। खिड़कियों की स्थिती ऐच्छिक नहीं होती। वे एक निश्चित क्रम में होती हैं, जिसे आप आगे समझ पायेंगे।

माना कि आप अपने मित्र को यह लिख कर भेजना चाहते हैं: **आंचलिक पार्टी प्रतिनिधियों की बैठक स्थगित करें। पुलिस को खबर लग चुकी है। साथियों को भी सूचित करें। बैठक की नयी तारीख शीघ्र प्रेषित होगी। आंतोन।**

कागज पर जाली रख कर षड़यंत्रकारी जाली की खिड़कियों में एक-एक कर अक्षर लिखना शुरू करता है।

चूंकि खिड़कियों की संख्या 16 है तो पहली बार आपकी खबर का सिर्फ एक अंश लिखा जायेगा :

आंचलिक पार्टी प्रतिनिधियों की बैठक स्थ...

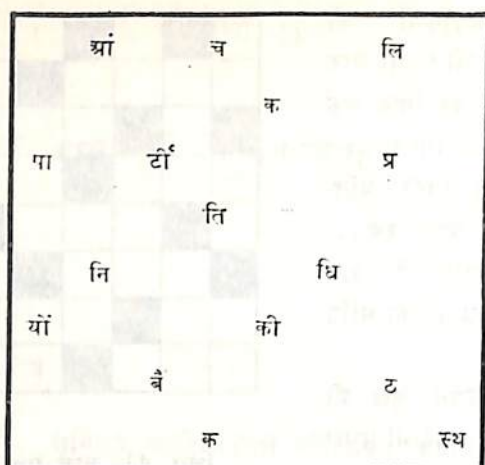
जाली हटाने के बाद कागज पर चित्र 42 की भाँति लेख मिलेगा।

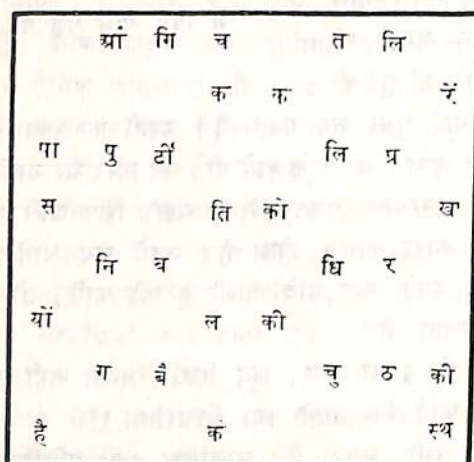
अबतक इसमें कुछ भी गुप्त नहीं है : कोई भी समझ सकता है कि क्या बात है। पर यह सिर्फ शुरूआत है ; पत्र इसी रूप में नहीं रहेगा। षड़यंत्रकारी अब जाली को कागज पर घड़ी की सूई की दिशा में एक चौथाई घुमा कर रखता है। जाली का स्थान वही रहता है, पर 2 से चिह्नित भुजा, जो पहले बायें थी, अब ऊपर आ जाती है। जाली की नयी स्थिति के फलस्वरूप अबतक लिखे अक्षर छिप जाते हैं और खिड़कियों के नीचे कोरा कागज होता है। उनमें अब आगे के 16 अक्षर लिखे जाते हैं। इसके बाद यदि जाली हटायी जाये, तो चित्र 43 की भाँति लेख मिलता है।

चित्र 41. गुप्त पत्र पढ़ने के लिये जाली। (कागज की एक ऐसी जाली बना लें और चित्र 45 में दिये गुप्त पत्र को पढ़ें।)

इस लेख को दूसरा क्या, खुद लिखने वाला नहीं समझ सकेगा, यदि वह भूल जाये कि उसने क्या लिखा था।

पर पत्र अभी अधूरा है : **आंचलिक पार्टी प्रतिनिधियों की बैठक स्थगित करें। पुलिस को खबर लग चुकी है।...**

अब आगे लिखने के लिये जाली को फिर घड़ी की सूई की दिशा में चौथाई घुमाते हैं। वह पुनः अबतक लिखे अक्षरों को छिपा लेगी और 16 नये रिक्त स्थान देगी। उनमें चंद और शब्दों के लिये जगह मिल जायेगी। उन्हें लिखने के बाद पत्र का रूप चित्र 44 की भाँति हो जायेगा।

चित्र 42. जाली हटा लेने पर यह आलेख नजर आयेगा।

	आं	गि	च		त	लि	
			क	क			रें
गा	पु	टीं			लि	प्र	
स			ति	को			खा
	नि	च			धि	र	
यों			ल	की			
	ग	बै			चु	ठ	की
है			क				स्थ

चित्र 43 इसके बाद अगले अक्षर लिखते हैं।

अंत में जाली को आखिरी बार घुमाते हैं। भुजा 4 ऊपर आ जाती है। 16 कोरे वर्गों में पत्र के बाँकी शब्द लिखते हैं। चूंकि तीन खाली घर बच जाते हैं, उन्हें किन्ही क, च, त अक्षरों से भर देते हैं, ताकि पुर्जी में खाली स्थान न हों।

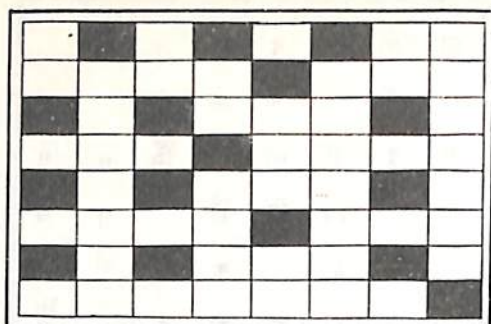
सा	आं	गि	च	थि	न	लि	
	यों		क	क	को		रें
पा	पु	टीं	भी		लि	प्र	सू
स		चि	ति	को		त	ख
	नि	ब		क	धि	र	
यां	रें		ल	की	बै		ठ
	ग	बै	क		चु	ठ	की
है	की		क	न		यी	स्थ

चित्र 44. जाली फिर दूसरी तरह घुमा कर रखनी चाहिये।

सा	आं	गि	च	थि	ता	लि	ता
री	यों	ख	क	क	को	शी	रें
पा	पु	टीं	भी	घ्र	लि	प्र	सू
स	प्रे	चि	ति	को	पि	न	ख
त	नि	ब	हो	क	धि	र	गी
यां	रे	आं	ल	की	बै	तों	ठ
न	ग	बै	क	क	चु	ठा	की
है	की	च	क	न	ट	यी	स्थ

चित्र 45. गुप्त पत्र तैयार है।

पत्र का रूप चित्र 45 की भाँति होगा।

अब इसमें कुछ पढ़ने की कोशिश करें! पुलिस के हाथों पत्र पड़ने पर भी कोई डर नहीं है। पुलिसवालों को लाख शक हो कि इसमें कोई महत्त्वपूर्ण सूचना छिपी है, पत्र का सार वही समझ सकता है,

चित्र 46. पोस्टकार्ड के आकार की जाली।

जिसके लिये वह लिखा गया है। उसके पास वैसी ही जाली होती है, जिसकी मदद से पत्र लिखा गया था।

पत्र पाने वाला इस गुप्त पत्र को कैसे पढ़ेगा? वह जाली को पत्र पर इस प्रकार रखेगा कि जाली की भुजा 1 ऊपर रहे। खिड़कियों से उसे 16 अक्षर नजर आयेंगे, जिन्हें वह अलग कागज पर उतार लेगा। इसके बाद वह जाली को घुमा देगा – और उसके सामने अगले 16 अक्षर होंगे। चौथी बार घुमाने के बाद सारा पत्र पढ़ा जा चुका होगा।

वर्गाकार जाली की जगह पर पोस्टकार्ड जैसी आयताकार जाली का भी प्रयोग किया जा सकता है। इसके घर भी लम्बे होते हैं (चित्र 46), अतः उनमें अक्षरों की बजाय आप छोटे शब्द भी लिख सकते हैं। यह मत सोचिये कि शब्द लिखने से पत्र पढ़ना सरल हो जायेगा। कुछ शब्द यदि पढ़े भी जाते हों, घबड़ाने की कोई बात नहीं है। शब्दों का क्रम इतना बिगड़ा हुआ है कि रहस्य खुलने की आशंका नहीं है। आयताकार जाली कागज पर इस प्रकार रखी जाती है कि पहले उसकी एक भुजा ऊपर रहे, फिर उसके सामने की भुजा ऊपर रहे। इसके बाद उसे पलट कर अन्य दो और स्थितियों में उसका प्रयोग करते हैं। हर नयी स्थिति में जाली पहले लिखे गये अक्षरों व शब्दों को ढक लेती है। यदि एक ही ऐसी जाली संभव होती, तो उसकी सहायता से लिखे गये पत्र में कुछ भी छिपाया नहीं जा सकता। पुलिस के पास वैसी ही एक जाली होती और रहस्य कुछ क्षणों में खुल जाता। पर भिन्न जालियों की संख्या विराट है।

64 घरों वाले वर्ग से बनी सभी संभव जालियाँ चित्र 47 में दिखायी गयी हैं। आप खिड़कियों के लिये कोई भी 16 घर चुन सकते हैं। सिर्फ इस बात का खयाल रखें कि चुने गये घरों में

समान नम्बर वाले दो घर न हों। हमने जिस जाली का व्यवहार ऊपर के उदाहरण में किया है, उसमें निम्न नम्बर के घर लिये गये हैं:

2, 4, 5
14
9, 11, 7
16
8, 15
3, 12
10, 6
13, 1

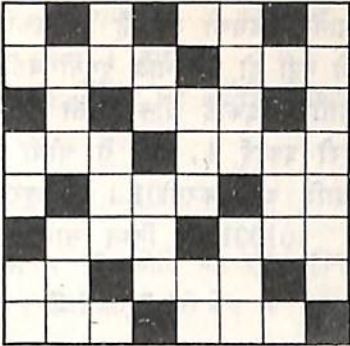
आप देखते हैं कि इसमें एक भी संख्या दुहरायी नहीं गयी है।

1	2	3	4	13	9	5	1
5	6	7	8	14	10	6	2
9	10	11	12	15	11	7	3
13	14	15	16	16	12	8	4
4	8	12	16	16	15	14	13
3	7	11	15	12	11	10	9
2	6	10	14	8	7	6	5
1	5	9	13	4	3	2	1

चित्र 47. इस वर्ग में मिलियार्ड से अधिक गुप्त जालियां हैं।

वर्ग में संख्याओं का क्रम-विन्यास (चित्र 43) समझना कठिन नहीं है। वर्ग को चार छोटे-छोटे बराबर वर्गों में बाँट देते हैं, जिन्हें हम रोमन संख्याओं I, II, III, IV (चित्र 48) द्वारा व्यक्त करेंगे। वर्ग I में घरों का क्रमांकन साधारण क्रम में किया गया है। वर्ग II – वर्ग I ही है, जिसे दायीं दिशा में चौथाई घुमाव दिया गया है। एक चौथाई और घुमाने पर हमें वर्ग III प्राप्त होता है और उसे चौथी बार घुमाने पर वर्ग IV मिलता है।

अब हिसाब कर देखें कि भिन्न जालियों की क्या संख्या हो सकती है।

घर № 1 को 4 जगहों (4 वर्गों) से चुना जा सकता है। उसके चार स्थानों में से किसी के भी साथ घर № 2 के लिये 4 जगहें चुनी जा सकती हैं। अतः दो खिड़कियाँ 4×4, अर्थात् 16 तरीकों से चुनी जा सकती हैं। तीन खिड़कियाँ – $4 \times 4 \times 4 = 16$ तरीकों से चुनी जा सकती हैं। इस विचार-क्रम का अनुसरण करते हुए

I	II
III	IV

चित्र 48. चित्र 47 का आरेख।

हम निर्धारित कर सकते हैं कि 16 खिड़कियाँ 4^{16} (16 बार 4 का गुणन) तरीकों से चुनी जा सकती हैं। इस प्रकार 1 अरब से अधिक प्रकार की जालियाँ प्राप्त होती हैं। यदि यह संख्या कुछ अतिशय लगे (बिल्कुल पास-पास खिड़कियाँ चुनना ठीक नहीं रहेगा, अतः ऐसी जालियों को हम छोड़ दें) तो भी भिन्न जालियों की संख्या कुछ करोड़ों से कम नहीं होगी। पत्र पढ़ने के लिये आवश्यक जाली ढूंढ़ना भूसे के ढेर में सूई खोजना होगा।

यदि मान लें कि अर्थोद्घाटकों का एक दल एक जाली बनाने तथा देखने में कि पत्र का कोई अर्थ निकलता है या नहीं, सिर्फ एक मिनट व्यय करता है तो अर्थोद्घाटन में दसियों करोड़ मिनट लग जायेंगे, पूरी सहस्त्राब्दियाँ बीत जायेंगी। पर यह उसी स्थिति के लिये सही है, जब अर्थोद्घाटन का कार्य हाथ से हो रहा हो। इसी लेखक की "मनोरंजक बीजगणित" पुस्तक में आप द्युतकर्मी परिकलन मशीनों के बारे में पढ़ सकते हैं। ऐसी मशीनें विशेष प्रोग्राम पर एक सेकेंड में हजारों करोड़ों कलन कर सकती हैं। वे सिर्फ गिनना ही नहीं जानतीं। वे, उदाहरण के लिये, जालियाँ बना-बना कर उनका परीक्षण भी कर सकती हैं कि उनसे अर्थोद्घाटन होता है या नहीं। इसके लिये आपको सिर्फ तदनुरूप प्रोग्राम बनाना पड़ेगा। ऐसे द्युत-गणित्रों को एक जाली के परीक्षण में यदि एक सेकेंड का हजारवाँ अंश व्यय करना पड़ता है, तो कुछ करोड़ जालियों के परीक्षण में उन्हें कुछ लाख सेकेंड, अर्थात कुछ दिन खर्च करने पड़ेंगे। जैसा कि देखते हैं, आधुनिक परिस्थितियों में गुप्त पत्र-व्यवहार की गोपनीयता बनाये रखना कठिन होता जा रहा है।

58. जाली को याद कैसे रखें? मान लें कि गणित्रों द्वारा अर्थोद्घाटन का खतरा नहीं है। पत्र का सिर्फ 2-3 दिन गोपनीय रहना काफी है और इतने कम समय में पत्र पकड़ा और अर्थोद्घाटन के लिये गणित्र-केंद्र में भेजा नहीं जा सकता। षड़यंत्रकारी जाली का प्रयोग करना निश्चय करते हैं। जाहिर है कि पत्र-व्यवहारक खुद सावधानी बरतेंगे कि पत्र किसी दूसरे के हाथ न लग जाये। बेहतर होगा, यदि जाली अपने पास रखा ही न जाये। वे पत्र मिलने पर उसे बना ले सकते हैं और पढ़ कर उसे नष्ट कर दे सकते हैं। इसके लिये उन्हें जाली

चित्र 49. गुप्त जाली का अंकगणित।

को याद रखना होगा। लेकिन खिड़कियों का क्रम याद कैसे रखा जा सकता है? यहाँ भी गणित की सहायता ली जा सकती है। खिड़कियों को संख्या 1 से द्योतित करेंगे और अन्य घरों को 0 से। तब जाली के घरों की प्रथम कतार को निम्न विधि से व्यक्त कर सकते हैं (चित्र 49) :

01010010

या, प्रथम शून्य छोड़ देने पर,—

1010010

दूसरी कतार, यदि आरंभिक शून्यों को छोड़ दिया जाये, इस प्रकार व्यक्त होगी :

1000

बाकी कतारों का द्योतन निम्न प्रकार से होगा :

10100010 10001000
10000 100010
1000100 10001.

इन संख्याओं का लेखन सरल करने के लिये हम इन्हें दशमलव प्रणाली में, जिसे साधारणतया प्रयोग करते हैं, नहीं मान कर द्विगुन

प्रणाली में मानेंगे। इसका अर्थ है कि इकाई अपने दायें की इकाई से दस गुनी बड़ी नहीं हो कर मात्र दुगुनी बड़ी होगी। अन्तिम इकाई हमेशा की तरह साधारण इकाई द्योत करती है; अंत से दूसरी इकाई 2, अंत से तीसरी इकाई 4, अंत से चौथी इकाई 8, अंत से पाँचवीं इकाई 16 आदि द्योत करती हैं। इस तरह पहली कतार व्यक्त करने वाली संख्या 1010010 में निम्न साधारण इकाइयां होंगी:

$$64+16+2=82$$

क्योंकि शून्य तदनुरूप कोटियों पर इकाई की अनुपस्थिति द्योत करते हैं।

संख्या 1000 की जगह (दूसरी कतार में) दशमलव प्रणाली की संख्या 8 लिखेंगे।

बाकी संख्याओं को निम्न में बदलना होगा:

$$128+32+2=162$$
$$16$$
$$64+4=68$$
$$128+8=136$$
$$32+2=34$$
$$16+1=17$$

82, 8, 162, 16, 68, 136, 34, 17 को याद कर लेना इतना कठिन नहीं है। इनका ज्ञान होने पर हम उन आरंभिक संख्याओं को प्राप्त कर सकते हैं, जिनसे ये बनी हैं और जो जाली की कतारों में खिड़कियों की संख्या इंगित करती हैं।

कैसे यह संभव है? उदाहरण के लिये, पहली संख्या – 82 – लें। यह देखने के लिये कि उसमें कितनी बार 2 की संख्या है, उसे 2 से विभाजित करेंगे; मिला 41; शेष नहीं है, – मतलब कि अंतिम स्थान पर शून्य है। दुक्के की प्राप्त 41 संख्या को पुनः 2 से विभाजित करेंगे, जिससे हमें उक्त संख्या में चौवों की कुल संख्या मिलेगी:

$$41 : 2 = 20 \text{ शेष } 1$$

इस का अर्थ है कि द्विगुन प्रणाली में 2 की कोटि पर, अर्थात् अंत से पहले के स्थान पर संख्या 1 होगी।

अब 20 को 2 से विभाजित करें कि हमारी संख्या में कितने 8 हैं, का पता चले:

$$20 : 2 = 10$$

शेष नहीं वचता। अर्थात 4 की कोटि पर शून्य होगा।

10 में 2 से भाग देंगे; मिलेगा बिना शेष के 5; 8 की कोटि पर शून्य होगा।

5 में 2 से भाग देने पर 2 भागफल मिलता है और 1 शेष बचता है: 16 की कोटि पर 1 होगा। अंत में 2 में 2 से भाग देकर ज्ञात करते हैं कि अगली कोटि में शून्य होगा और अंतिम कोटि में (यह 64 की कोटि है) 1 होगा।

इस प्रकार इष्ट संख्या के सभी अंक ज्ञात हो जाते हैं:

1010010

चूंकि इसमें अंकों की संख्या सिर्फ 7 है और जाली की हर कतार में 8 घर होते हैं, स्पष्ट है कि शुरू का शून्य छोड़ा गया था। अतः कतार में खिड़कियों का क्रम निम्न अंकों द्वारा व्यक्त होगा:

01010010

अर्थात् खिड़कियाँ दूसरे, चौथे तथा सातवे स्थानों पर होंगी।

जैसा कि कहा गया था, गुप्त लेखन की असंख्य प्रणालियाँ हैं। हमने जाली का अध्ययन किया, क्योंकि वह गणित के साथ निकट संपर्क रखती है और इस बात का अतिरिक्त प्रमाण देती है कि जीवन के असंख्य पक्ष हैं, जिनमें गणित सहायक हो सकता है।

अध्याय 7

दैत्य-संख्यायें

59. **मुनाफे का सौदा**. कब यह घटना घटी थी – पता नहीं। हो सकता है कि कभी घटी ही न हो। इसकी संभावना अधिक है। पर सच हो या झूठ, कहानी इतनी मनोरंजक जरूर है कि उसे सुना जा सके।

1.

एक करोड़पति जब परदेस से घर लौटा, तो काफी खुश था। रास्ते में उसे एक आदमी मिला था, जिससे उसे बड़े लाभ की आशा थी।

"ऐसा भी संयोग होता है, – घर आ कर उसने बताया। – यूं ही नहीं कहते कि पैसों के पीछे पैसा भागता है। मेरे पैसों के पीछे भी पैसे भागने वाले हैं। किसने उम्मीद की थी! राह में मुझे एक अपरिचित मिला। देखने में साधारण-सा था। मैं उससे बात भी नहीं करता, पर जैसे ही उसे पता चला कि मैं पैसों वाला हूँ, खुद बातें शुरू कर दी। और बात-चीत के अंत में ऐसा मुनाफे का धंधा बताया कि मैं अवाक रह गया।

– एक सौदा, – कहता है, – तुम्हारे साथ तय करते हैं। मैं महीने भर हर दिन तुम्हे एक लाख रूबल दिया करूँगा। मुफ्त में नहीं, पर कीमत तुम्हारे लिये बिल्कुल साधारण होगी। – शर्त्त के मुताबिक, पहले दिन मैं उसे, – कहने में हँसी भी आती है, – सिर्फ एक कोपेक दूंगा।

मुझे अपने कानों पर विश्वास नहीं हुआ :

—एक कोपेक? —मैं फिर से पूछता हूँ।

—एक कोपेक, —वह कहता है। —दूसरे दिन दूसरे लाख के लिये दो कोपेक दोगे।

—और आगे क्या होगा? —मैं धैर्य खो रहा था।

—आगे यह होगा : तीसरे लाख के लिये 4 कोपेक दोगे, चौथे लाख के लिये 8, पाँचवे के लिये 16। इसी तरह से पूरा महीना हर दिन पिछले दिन से दुगुना कोपेक दिया करोगे।

—और इसके बाद? —मैं पूछता हूँ।

—बस, —वह कहता है, —और कुछ नहीं चाहिये मुझे। सिर्फ़ बात पक्की होनी चाहिये : हर सुबह मैं एक लाख रूबल लाया करूँगा और तुम मुझे वह दोगे, जो हम तय कर चुके हैं। महीने से पहले सौदा नहीं टूटना चाहिये।

चंद कोपेक के लिये लाखों दे रहा है! यदि नोट जाली नहीं हैं, तो आदमी सिर-फिरा है। पर सौदा मुनाफे का है, छोड़ना नहीं चाहिये।

—ठीक है, —मैं उससे कहता हूँ। —तुम अपने लाख लाया करो। अपनी ओर से मैं सही भुगतान किया करूंगा। पर तुम मुझे धोखा मत देना; असली नोट लाना।

—चिंता मत करो, —वह कहता है, —कल सुबह आऊँगा।

सिर्फ एक बात का डर है : यदि नहीं आया तो? कहीं समझ न जाय कि उसके लिये यह बहुत घाटे का सौदा है। खैर, कल सुबह तक इंतजार करना बड़ी बात नहीं है।

2.

दिन बीता। सबेरे-सबेरे किसी ने खिड़की खटखटायी। यह वही अपरिचित था, जिससे करोड़पति रास्ते में मिला था।

—पैसे निकालो, —उसने कहा। —मैं अपना ले आया हूँ।

और सचमुच में वह अजीब आदमी कमरे में आ कर पैसे निकालने लगा। नोट असली थे, जाली नहीं। उसने ठीक एक लाख गिन कर टेबुल पर रख दिये और कहा :

चित्र 50. "एक लाख टपक पड़े हैं आकाश से!"

– मैं शर्त्त के मुताबिक ले आया हूँ। अब तुम्हारी बारी है भुगतान करने की।

करोड़पति ने टेबुल पर तांबे के एक कोपेक का सिक्का रख दिया और प्रतीक्षा करने लगा। उसे डर था कि कहीं मेहमान सिक्के को देख कर अपने रूबल वापस न मांगने लगे। अपरिचित ने सिक्के को हाथों में उलट-पलट कर देखा, तौला और बटुए में रख लिया।

– कल इसी समय इंतज़ार करना। और हाँ, दो कोपेक का बंदोबस्त करना मत भूल जाना, – उसने कहा और चला गया।

करोड़पति को अपनी खुशनसीबी पर विश्वास नहीं हो रहा था: एक लाख रूबल छप्पर फाड़ कर आकाश से गिरे हैं! उसने फिर से रूबल गिने, भली-भाँति जाँचा – जाली तो नहीं हैं। सब ठीक था। उसने पैसे छिपा कर रख दिये। अब वह बैचैनी से अगली सुबह का इंतजार कर रहा था।

रात को उसे संदेह होने लगा: कहीं वो डकैत तो नहीं है। बेवकूफ के रूप में आता है। शायद देखने के लिये कि मैं पैसे कहाँ छिपा कर रखता हूँ। इसके बाद एक दिन अपने दोस्तों के साथ आ धमकेगा!

करोड़पति ने दरवाजा अच्छी तरह बंद कर लिया। शाम से डर के मारे कान लगाये खिड़की से झाँकना शुरू कर दिया। रात भर नींद

नहीं आयी। सुबह खिड़की पर खटखटाहट हुई; अपरिचित पैसों के साथ हाजिर था। उसने एक लाख गिन कर रख दिये, अपने दो कोपेक प्राप्त किये और सिक्कों को बटुए में छिपा कर चलता बना। जाते वक्त उसने कहा:

—कल चार कोपक का बंदोबस्त करना मत भूलना।

करोड़पति फिर खुश था: दो लाख मुफ्त में मिल गये। मेहमान डकैत नहीं लगता था: कोई ताक-झाँक नहीं की उसने; सिर्फ अपने कोपेकों की मांग की। सनकी है! दुनिया में और भी ऐसे लोग होते, तो समझदार लोगों का जीवन सुधर जाता।

अजनवी तीसरे दिन भी आया और करोड़पति को तीसरा लाख 4 कोपेक में दे गया।

एक दिन और बीता। और चौथा लाख आठ कोपेक में मिल गया।

पाँचवा लाख भी मिला—16 कोपेक में।

इसके बाद छठा—32 कोपेक में।

सात दिनों में करोड़पति ने सात लाख रूबल प्राप्त किये और इसके लिये उसने अदा किया सिर्फ 1 कोपेक + 2 कोपेक + 4 कोपेक + 8 कोपेक + 16कोपेक + 32 कोपेक + 64 कोपेक = 1 रूबल 27 कोपेक।

कंजूस करोड़पति को यह बहुत पसंद आया। उसे अफसोस होने लगा कि उसने दो महीनों का सौदा क्यों नहीं किया। अब तीस लाख से अधिक उसे नही मिलेंगे। 15 दिन भी और होते तो अच्छा था। इस सनकी से अवधि बढ़ाने के लिये कहा जाये? कहीं समझ न जाये कि मुफ्त में पैसे दे रहा है...।

अपरिचित हर सुबह अपने एक लाख रूबल के साथ नियत समय पर आ जाया करता था। आठवें दिन उसे 1 रूबल 28 कोपेक मिले, नवें दिन—2 रूबल 56 कोपेक, 10-वें दिन—5 रूबल 12 कोपेक, 11-वें दिन—10 रूबल 24 कोपेक, 12-वें दिन—20 रूबल 48 कोपेक, 13-वें दिन—40 रूबल 96 कोपेक और 14-वें दिन—81 रूबल 92 कोपेक।

करोड़पति बिना हिचकिचाहट के ये पैसे दे दिया करता था: आखिर उसे 14 लाख रूबल मिल चुके थे! और उसे सिर्फ डेढ़ सौ के करीब रूबल देने पड़े थे।

पर करोड़पति की खुशियाली अधिक दिनों तक नहीं टिकी रही: अब वह समझने लगा कि उसका सनकी मेहमान कोई बेवकूफ नहीं है और सौदा इतना लाभप्रद नहीं है, जितना शुरू में लग रहा था। 15 दिनों बाद उसे कोपेक नहीं देने पड़ रहे थे। अब भुगतान सैकड़ों रूबलों में हो रहा था और अदायगी की राशि भयानक गति से बढ़ रही थी। महीने के दूसरे पक्ष में करोड़पति ने चुकता किया:

15-वें लाख के लिये . . . . . 163 रूबल 84 कोपेक,
16-वें » » » . . . . . 327 » 68 » ,
17-वें » » » . . . . . 655 » 36 » ,
18-वें » » » . . . . 1310 » 72 » ,
19-वें » » » . . . . 2621 » 44 » .

जो भी हो, करोड़पति अपने को कोई घाटे में महसूस नहीं कर रहा था: उसे कुल पाँच हजार से कुछ अधिक देने पड़े थे और उसने प्राप्त किये 18 लाख रूबल।

पर मुनाफा दिन-प्रतिदिन घट रहा था और बहुत ही तेजी से घट रहा था।

आगे के भुगतान इस प्रकार हैं:

20-वें लाख के लिये . . . . . 5242 रूबल 88 कोपेक,
21-वें » » » . . . . . 10485 » 76 » ,
22-वें » » » . . . . . 20971 » 52 » ,
23-वें » » » . . . . . 41943 » 04 » ,
24-वें » » » . . . . . 83886 » 08 » ,
25-वें » » » . . . . . 167772 » 16 » ,
26-वें » » » . . . . . 335544 » 32 » ,
27-वें » » » . . . . . 671088 » 64 » .

जितना मिलता था, उससे कहीं अधिक भुगतान करना पड़ रहा था। यहाँ रूक जाना अच्छा होता, पर सौदा तोड़ा नहीं जा सकता था।

आगे स्थिति और बिगड़ती गयी। करोड़पति काफी देर से समझा कि अजनबी ने उसे क्रूरता के साथ धोखा दिया है: वह जितना देता है, उससे कई गुना अधिक पायेगा...

28-वें दिन से करोड़पति लाखों में भुगतान कर रहा था। आखिरी दो दिनों ने उसे पूरा दिवालिया बना दिया। ये रहीं भुगतान की वे विशाल राशियाँ :

28-वें लाख के लिये . . . . . 1342177 रूबल 28 कोपेक,
29-वें » » » . . . . . 2684354 » 56 » ,
30-वें » » » . . . . . 5368709 » 12 » .

जब आखिरी बार मेहमान ने विदा ली, करोड़पति ने हिसाब लगाना शुरू किया कि "मुफ्त" में मिलने वाले 30 लाख के लिये उसे कितने पैसे अदा करने पड़े। पता चला कि अजनवी ने प्राप्त किये :

10 737 418 रूबल 23 कोपेक।

करीब 107 लाख! .. और यह शुरू हुआ था सिर्फ एक कोपेक से। अपरिचित यदि 3 लाख भी प्रतिदिन देता, घाटे में नहीं रहता।

3.

यह कहानी खत्म करने के पहले हम देख लें कि करोड़पति के नुकसान का हिसाब शीघ्र कैसे प्राप्त किया जा सकता है, अर्थात् दूसरे शब्दों में, न्यूनतम समय में निम्न संख्या-क्रम का योगफल कैसे प्राप्त किया जा सकता है :

$$1+2+4+8+16+32+64+ \text{आदि}.$$

इन संख्याओं की एक विशेषता इस प्रकार है :

$$1=1$$
$$2=1+1$$
$$4=(1+2)+1$$
$$8=(1+2+4)+1$$
$$16=(1+2+4+8)+1$$
$$32=(1+2+4+8+16)+1 \text{ आदि।}$$

हम देखते हैं कि क्रम की हर संख्या अपनी पिछली सभी संख्याओं के कुल योग से इकाई अधिक है। अतः जब आरंभ से किसी संख्या तक

(उदाहरण के लिये 1 से 32768 तक) के संख्या-क्रम का योग ज्ञात करना हो, तो यह होगा : 32768 से पहले तक की संख्याओं का योग, अर्थात् इस संख्या से इकाई कम (32768 — 1) की संख्या, और इस संख्या (32768) का योग। उत्तर होगा : 65535।

इस तरीके से कंजूस करोड़पति के नुकसान का बहुत जल्द हिसाब लगाया जा सकता है, यदि हम जान जायें कि आखिरी दिन उसने कितना भुगतान किया था। आखिरी भुगतान था : 5 368 709 रूबल 12 कोपेक।

अतः कुल भुगतान (5 368 709 12 — 1) + (5 368 709 12) कोपेक = 10 737 418 रूबल 23 कोपेक।

60. शहर में अफवाह. आश्चर्य होता है कि शहर में अफवाहें कितनी जल्दी फैलती हैं। कभी-कभी किसी बात के दो घंटे भी नहीं बीतते और उसकी खबर सारे शहर को हो जाती है। जिस घटना के चंद गवाह थे, उसका ज्ञान जल्द ही पूरे शहर को हो जाता है। यह असाधारण गति आश्चर्यजनक और रहस्यमय लगती है।

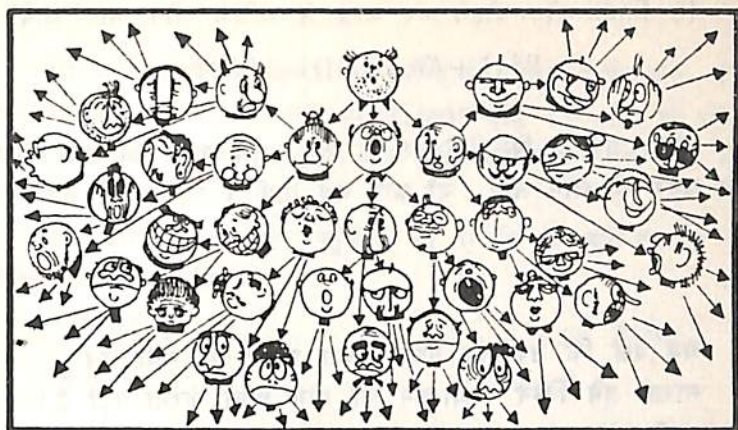
पर यदि हिसाब लगाना शुरू करें, तो स्पष्ट हो जायेगा कि इसमें कोई जादू की बात नहीं है : यह संख्याओं की विशेषताओं का फल है, अफवाह के किसी गुप्त गुण-धर्म का नहीं।

उदाहरण के लिये एक अफवाह का प्रसारण देखें।

1.

एक छोटे शहर में, जिसकी जनसंख्या 50 हजार है, एक व्यक्ति 8 बजे सुबह राजधानी से कोई खबर लाता है और जहाँ वह रुकता है, सिर्फ तीन स्थानीय व्यक्तियों को बताता है। मान लें कि इसमें 15 मिनट लगे।

इस प्रकार सवा आठ बजे शहर में यह खबर सिर्फ चार व्यक्ति जानते थे : आगन्तुक और तीन स्थानीय लोग।

जानने के बाद तीनों में से प्रत्येक तीन-तीन अन्य लोगों को बताने चल पड़ते हैं। इसमें भी 15 मिनट लगते हैं। अर्थात् आधे घंटे में खबर $4 + (3 \times 3) = 13$ व्यक्ति जान लेते हैं।

चित्र 51. अफवाह का फैलना।

अगले 15 मिनटों में ये नौ नये व्यक्ति अपने तीन-तीन मित्रों तक उक्त खबर पहुँचाने में सफल हो जाते हैं। अतः पौने नौ बजे खबर का ज्ञान

$13+(3\times 9)=40$ लोगों को हो जाता है।

यदि खबर इसी गति से शहर में फैलती जाये, अर्थात् हर व्यक्ति उसे सुनने के बाद 15 मिनटों में अपने तीन परिचितों को बता दे, तो खबर के प्रसार का काल-क्रम निम्न होगा :

9 बजे खबर जानते हैं $40+(3\times 27)=121$ व्यक्ति,

$9\frac{1}{4}$ » » » » $121+(3\times 81)=364$ » ,

$9\frac{1}{2}$ » » » » $364+(3\times 243)=1093$ » .

इस प्रकार, शहर में खबर आने के डेढ़ घंटे बाद उसे लगभग 1100 व्यक्ति जान लेते हैं। 50 000 की जनसंख्या वाले शहर के लिये यह संख्या कुछ अधिक नहीं लगती। आप सोचते होंगे कि जबतक सब लोग इसे जान जायेंगे, काफी अधिक समय बीत जायेगा। पर देखें, आगे बात कैसे फैलती है :

$9\frac{3}{4}$ बजे खबर जानते हैं $1093+(3\times 729)=3280$ व्यक्ति,

10 » » » » $3280+(3\times 2187)=9841$ » .

15 मिनट और बीतने पर आधे से अधिक लोग जान जायेंगे :

$$9841 + (3 \times 6561) = 29524$$

इसका अर्थ है कि साढ़े दस के कुछ पहले शहर का हर व्यक्ति इस खबर को जान लेगा, जो आठ बजे सिर्फ 1 व्यक्ति को ज्ञात थी।

2.

अब देखें कि उपरोक्त गणना किस प्रकार की गयी है।

सारतः हमे निम्न संख्या-क्रम का योग प्राप्त करना पड़ा है :

$1 + 3 + (3 \times 3) + (3 \times 3 \times 3) + (3 \times 3 \times 3 \times 3) +$ आदि।

योगफल जानने की वैसी कोई संक्षिप्त विधि है या नहीं, जिसकी सहायता से हमने संख्या-क्रम $1 + 2 + 4 + 8 + 16 +$ आदि का योगफल प्राप्त किया था? ऐसी विधि प्राप्त की जा सकती है, यदि हम योज्य संख्याओं की निम्न विशेषता पर विचार करें :

$$1 = 1$$
$$3 = 1 \times 2 + 1$$
$$9 = (1 + 3) \times 2 + 1$$
$$27 = (1 + 3 + 9) \times 2 + 1$$
$$81 = (1 + 3 + 9 + 27) \times 2 + 1$$ आदि।

दूसरे शब्दों में : क्रम की हर संख्या अपनी सभी पिछली संख्याओं के योग के दुगुने से इकाई अधिक है।

निष्कर्ष यह है कि 1 से किसी संख्या तक इस क्रम का योग ज्ञात करने के लिये इसी संख्या में इससे इकाई कम संख्या का आधा जोड़ देना पर्याप्त रहेगा।

उदाहरण के लिये,

$$1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729$$

क्रम का योग- $729 + \frac{729 - 1}{2} = 729 + 364 = 1093$ होगा।

3.

हमारे उदाहरण में प्रत्येक नगर-निवासी खबर सिर्फ तीन लोगों तक पहुँचाता है। यदि निवासी अधिक गपोड़ होते और तीन की बजाय पाँच व्यक्तियों को खबर सुनाते तो श्रुति और भी जल्द फैल गयी होती।

पाँच लोगों तक खबर पहुँचाने की स्थिति में श्रुति-प्रसारण का काल-क्रम निम्न होता:

8 बजे . . . . $=1$ व्यक्ति,
$8\frac{1}{4}$ » . . . . $1+5=6$ » ,
$8\frac{1}{2}$ » . . . . $6+(5\times5)=31$ » ,
$8\frac{3}{4}$ » . . . . $31+(25\times5)=156$ » ,
9 » . . . . . . $156+(125\times5)=781$ » ,
$9\frac{1}{4}$ » . . . . . . $781+(625\times5)=3906$ » ,
$9\frac{1}{2}$ » . . . . . $3906+(3125\times5)=19531$ » .

सुबह पौने दस बजे के कुछ पहले ही खबर नगर के 50000 लोगों को ज्ञात हो जायेगी।

श्रुति-प्रसारण और भी जल्द होता, यदि हर व्यक्ति 10 अन्य लोगों को खबर सुनाता। इस हालत में हम निम्न शीघ्र बढ़ने वाला, द्रुत-वर्धक संख्या-क्रम प्राप्त करते:

8 बजे . . . . $=1$,
$8\frac{1}{4}$ » . . . . $1+10=11$,
$8\frac{1}{2}$ » . . . . $11+100=111$,
$8\frac{3}{4}$ » . . . . $111+1000=1111$,
9 » . . . . . . $1111+10000=11111$.

स्पष्ट है कि अगली संख्या 111 111 होगी। अर्थात् सारा शहर 10 बजे के कुछ ही बाद समाचार से अवगत हो जायेगा। श्रुति लगभग एक घंटे में प्रसारित हो जाती है।

61. सस्ती सायकिलों का हिमधाव. क्रांति-पूर्व हमारे यहाँ और विदेशों में, जहाँ शायद अब भी हैं, ऐसे व्यापारी होते थे, जो अपना खराब माल बेचने के लिये अक्सर नयी-नयी तिकड़में निकाला करते थे। शुरू करते थे अखबारों और पत्रिकाओं में विज्ञापनों से। ऐसा एक विज्ञापन हम उदाहरण के लिये प्रस्तुत करते हैं:

10 रूबल में सायकिल!

मात्र 10 रूबल खर्च कर हर आदमी
एक सायकिल का मालिक
बन सकता है!
50 रूबल की जगह 10 रूबल!
खरीद की शर्तें मुफ्त भेजी जाती हैं।

निस्संदेह, बहुत से लोग इस आकर्षक विज्ञापन के लालच में पड़ कर इस असाधारण खरीद की शर्तें मांगने लगते थे। उत्तर में उन्हें एक परिचय-पत्र भेजा जाता था, जिससे निम्न बातें ज्ञात होती थीं।

10 रूबल में सायकिल नहीं, बल्कि 4 टिकटें भेजे जाते थे। इन्हें 10 रूबल की दर से अपने परिचितों के बीच बेचना पड़ता था। प्राप्त 40 रूबल उक्त कंपनी को भेजना पड़ता था और तब वहाँ से सायकिल आती थी। अर्थात् खरीददार ने सचमुच अपनी जेब से सिर्फ 10 रूबल खर्च किये। बाकी 40 रूबल उसकी जेब के नहीं होते थे। यह सच है कि टिकटें बेचने के लिये उसे कुछ भाग-दौड़ करनी पड़ती थी, पर यह श्रम नगण्य था और वह इस पर ध्यान नहीं देता था।

यह टिकट किस लिये था? 10 रूबल देकर उसे खरीदने वाले को क्या लाभ होता था? इस टिकट के बदले में कंपनी से और आगे प्रसारण के लिये पाँच और टिकट मिलते थे; दूसरे शब्दों में, टिकट खरीदने वाले को सायकिल के लिये 50 रूबल एकत्र करने का अवसर दिया जाता था। टिकटें बेच कर प्राप्त पैसे जमा करने पर उसे सायकिल मिलती थी, जिसके लिये अपनी जेब से उसे 10 रूबल ही खर्च करने पड़े थे। टिकटों के नये खरीददार कंपनी से पुनः पाँच-पाँच टिकटें प्राप्त करते थे।

यदि सरसरी निगाह से देखें तो इसमें कोई धोखा नजर नहीं आता। विज्ञापन का दावा पूरा हो जाता था: सायकिल सचमुच सिर्फ 10 रूबल में मिल जाती थी। और कंपनी को भी घाटा नहीं था,– वह अपने माल की पूरी कीमत वसूल कर लेती थी। फिर भी कोई शक नहीं कि यह एक धोखेबाजी थी। हमारे यहाँ इस ठगी को "हिमधाव" का नाम दिया गया था। हिमधाव में भाग लेने वाले असंख्य लोग, जो अपने टिकट नहीं बेच पाते थे, घाटे में रहते थे। दर असल यही वे लोग थे, जो 10 रूबल में ख़रीदी गयी सायकिलों की बाक़ी कीमत अदा करते थे। कभी न कभी वह क्षण आ ही जाता था, जब लोग अपने टिकटों के लिये खरीददार नहीं ढूंढ़ पाते थे। आप यह समझ जायेंगे, यदि कागज-पेंसिल के साथ बैठ कर देखें कि हिमधाव में भाग लेने वाले लोगों की संख्या कितनी तेजी से बढ़ती है।

खरीददारों का पहला समूह, जो सीधे कंपनी से टिकटें प्राप्त करता है, उन्हें आसानी से बेच लेता है। इस समूह में से प्रत्येक व्यक्ति अपने टिकट चार अन्य व्यक्तियों के हाथ सुपुर्द करता है।

ये चार व्यक्ति अपने टिकट 4×5, अर्थात् 20 अन्य व्यक्तियों को बेचेंगे। माना कि 20 खरीददार मिल जाते हैं।

हिमधाव आगे बढ़ता है: टिकटों के 20 नये खरीददार $20 \times 5 = 100$ अन्य व्यक्तियों को टिकटें बेचेंगे। शुरू से अब तक हिमधाव में

$1 + 4 + 20 + 100 = 125$ व्यक्ति खिंच चुके हैं। इनमें से 25 लोग सायकिल प्राप्त कर चुके हैं और बाकी लोग आशा कर रहे हैं। यह आशा उन्हें 10 रूबल में मिली है।

अब हिमधाव परिचितों के दायरे से निकल कर शहर में फैलता है, पर यहाँ टिकट के नये खरीददारों को ढूंढ़ना कठिन होता जाता है। ये आखिरी सौ व्यक्ति 500 लोगों को टिकट बेचेंगे और ये 500 व्यक्ति 2500 नये शिकार की खोज में निकलेंगे। शहर जल्द ही टिकटों की बाढ़ से ग्रस्त हो जाता है और उनके नये खरीददारों को ढूंढ़ना असंभव सा हो जाता है।

आप देखते हैं कि हिमधाव की चपेट में आये लोगों की संख्या का वर्धन उन्हीं नियमों के अनुसार होता है, जिनके बारे में हम श्रुति-

प्रसारण के अध्ययन के वक्त बातें कर रहे थे। हिमधावन की स्थिति में हमें संख्याओं का निम्न पिरामिड मिलता है :

1
4
20
100
500
2500
12500
62500

यदि शहर बड़ा है और इसमें सायकिल पर चढ़ सकने वाले लोगों की संख्या $62^1/_2$ हजार है, तो 8 वें दौर पर हिमधाव का ह्रास हो जाना चाहिये। सब उसकी चपेट में आ जायेंगे। पर सायकिल सिर्फ पाँचवे भाग लोगों के पास होगी। बाकी $^4/_5$ लोगों के पास सिर्फ टिकट होंगे, जिन्हें अब बेचा नहीं जा सकता।

अधिक जनसंख्या वाले शहर में, या किसी आधुनिक राजधानी में, जिसमें निवासियों की संख्या करोड़ों तक पहुँचती है, संतृप्ति का क्षण चंद ही और दौरों के बाद आ सकता है। संख्याओं के हमारे पिरामिड की अगली सीढ़ियाँ इस प्रकार हैं :

312500
1562500
7812500
39062500

जैसा कि देखते हैं, 12 वें दौर पर हिमधाव की चपेट में एक पूरा राज्य आ जा सकता है और इसकी जनसंख्या का $^4/_5$ भाग धोखा खायेगा।

अब देखें कि कंपनी हिमधाव के माध्यम से क्या करती है। वह $^4/_5$ निवासियों को बाकी $^1/_5$ निवासियों द्वारा खरीदे गये माल की कीमत चुकता करने को विवश करती है। दूसरे शब्दों में, वह चार नागरिकों को पाँचवे की संपत्ति बढ़ाने पर विवश करती है। इसके अतिरिक्त, उसे माल बेचने के लिये अनगिनत एजेंट मुफ्त में मिल जाते हैं। हमारे

लेखकों में से एक ने इस धोखे का बिल्कुल उपयुक्त नाम दिया है: "परस्पर धोखे का हिमधाव"।* ऐसे धंधों के पीछे दैत्य-संख्यायें छिपी होती हैं। वे उन लोगों को दंडित करती हैं, जो धोखेबाजों से से अपने हितों को सुरक्षित रखने के लिये अंकगणित का प्रयोग करना नहीं जानते।

62. **इनाम.** किंवदंती के अनुसार घटना शताब्दियों पूर्व प्राचीन रोम में घटी थी।**

1.

सम्राट की आज्ञा से सेनापति तेरेंसी ने देशों की विजय-यात्रा पूरी की और अपार धन-राशि के साथ रोम लौटा। राजधानी में आते ही उसने सम्राट से मिलने की आज्ञा-मांगी।

सम्राट ने प्रेम से उसका सत्कार किया, उसकी युद्ध-सेवाओं के लिये धन्यवाद दिया और इनाम के रूप में उसे सीनेट में उच्च स्थान देने का वचन दिया।

पर तेरेंसी को यह नहीं चाहिये था। उसने इन्कार करते हुए कहा:

– जहाँपनाह, तुम्हारे राज्य की शक्ति बढ़ाने तथा तुम्हारा यश फैलाने के लिये मैंने अनगिनत लड़ाइयाँ लड़ी और विजय प्राप्त किये। मैं मरने से नहीं डरता। यदि मेरे पास एक नहीं अनेक जीवन होते, मैं सब तुम्हारे लिये न्योछावर कर देता। पर मैं युद्ध से थक गया हूँ। यौवन ढल चुका है और धमनियों में रक्त की गति मंद हो गयी है। अब समय आ गया है, जब अपने पितामहों के घर में विश्राम किया जाय और गृहस्थ जीवन का आनंद लिया जाये।

– तुम्हे क्या चाहिये, तेरेंसी? – सम्राट ने पूछा।

– अभयदान करें, महाराज! युद्ध-जीवन की लम्बी अवधि में अपनी तलवार से शत्रुओं का रक्त बहाने में लीन मैं अपने लिये कोई धन-संचय नहीं कर पाया। मैं निर्धन हूँ, महाराज...

---

*ई० इ० यासींसकी।

**इंगलैंड के एक व्यक्तिगत पुस्तकालय में प्राप्त एक पुरानी लैटिन हस्तलिपि का यह स्वतंत्र पुनर्कथन है।

–बोलो, बहादूर तेरेंसी।

–अपने इस नम्र सेवक को यदि तुम इनाम देना चाहते हो,– सेनापति ने कहा,–तो तुम्हारी दयालुता से मैं अपने बाकी दिन घर में चैन से बिताना चाहुँगा। मुझे मान नहीं चाहिये, सर्वशक्ति संपन्न सीनेट में स्थान नहीं चाहिये। मैं राज्य-शक्ति और सामाजिक जीवन से दूर होना चाहता हूँ, ताकि निश्चिंत विश्राम कर सकूं। महाराज, मुझे बाकी दिन गुजारने के लिये धन चाहिये।

सम्राट, किंवदंती कहती है, कंजूस था। वह अपने लिये धन जमा करता था और दूसरों पर बहुत कंजूसी से खर्च करता था। सेनापति की प्रार्थना से वह सोच में पड़ गया।

–कितना धन चाहिये तुम्हें? –उसने पूछा।

–दस लाख दीनार, महाराज।

सम्राट फिर सोच में डूब गया। सेनापति सर झुकाये प्रतीक्षा करता रहा।

अंततोगत्वा, सम्राट ने कहना शुरू किया:

–पराक्रमी तेरेंसी! तुम महान योद्धा हो और तुम्हारे वीरतापूर्ण कार्यों के लिये तुम्हें उदार पारितोषिक मिलने चाहिये। कल दोपहर यहाँ तुम मेरा निर्णय सुनोगे।

2.

दूसरे दिन उक्त समय पर सेनापति दरबार में उपस्थित हुआ।

–नमस्कार तुम्हें, बहादुर तेरेंसी! –सम्राट ने कहा।

तेरेंसी ने नम्रतापूर्वक सर झुका कर कहा:

–मैं तुम्हारा निर्णय सुनने आया हूँ, महाराज। तुमने उदार हृदय से इनाम देने का वचन दिया था।

–मैं नहीं चाहता कि इतने महान योद्धा को इतनी छोटी राशि इनाम में दी जाये। मेरे वचन सुनो। मेरे खजाने में 50 लाख ब्रास* हैं। अब ध्यानपूर्वक सुनो। तुम खजाने में जाओगे और वहाँ से एक ब्रास लाकर मेरे पैरों के पास रख दोगे। दूसरे दिन पुनः खजाने में

---

*तांबे का छोटा सिक्का, दिनार का पाँचवा अंश।

जाओगे और पहले सिक्के से दुगुना बड़ा सिक्का लाकर मेरे पैरों के पास रखोगे। तीसरे दिन 4 ब्रास के तुल्य सिक्का लोगे, चौथे दिन 8 ब्रास के तुल्य, पाँचवे दिन 16 ब्रास के तुल्य। तुम्हारा सिक्का हर दिन पिछले दिन से दुगुना बड़ा होगा। मैं आज्ञा देता हूँ कि खजाने में प्रतिदिन तुम्हारे लिये आवश्यक मूल्य का सिक्का रखा रहे। जबतक तुममें शक्ति है, तुम खजाने से सिक्के ले जाया करोगे। दूसरा कोई इसमें तुम्हारी सहायता न करे। जब तुम देखोगे कि खुद नहीं उठा सकते, छोड़ दोगे। हमारा समझौता टूट जायेगा। पर जो सिक्के तुम मेरे पैरों तक ला चुके होगे, तुम्हारे पास रहें वे ही तुम्हारा इनाम होंगे।

तेरेंसी हर शब्द ध्यान से सुन रहा था।

उसकी आँखों के सामने एक से एक बड़े सिक्कों की अपार राशि कौंध रही थी, जिन्हें अपनी कल्पना में वह खजाने से उठा कर अपने घर ले जाने वाला था।

—मैं तुम्हारी दयालुता से संतुष्ट हूँ, महाराज, — उसने प्रसन्न हृदय से कहा। — तुम्हारा इनाम सत्य ही बड़ा है।

3.

तेरेंसी का राज्य-कोष में जाना शुरू हो गया। खजाना दरबार से निकट था और प्रथम सिक्कों को सम्राट तक लाने में कोई कठिनाई नहीं हुई।

पहले दिन उसने खजाने से सिर्फ एक ब्रास लिया। यह छोटा सा सिक्का था, जिसका व्यास 21 मि० मी० था और वजन 5 ग्राम।

इस वजन से दुगुने, चौगुने, अठगुने, 16 – गुने और 32 – गुने भारी दूसरे, तीसरे, चौथे, पाँचवे तथा छठे सिक्कों को भी लाना आसान था।

सातवाँ सिक्का आधुनिक इकाईयों में 320 ग्राम का था और उसका व्यास था $8^1/_2$ से० मी० (या सही-सही : 84 मि० मी०)*

---

*यदि सिक्का साधारण सिक्के से 64 गुना बड़ा है, तो चौड़ाई और और मुटाई में वह सिर्फ चार गुना बड़ा होगा, क्योंकि $4 \times 4 \times 4 = = 64$। यह ध्यान में रखें। इस तथ्य की आगे जरूरत पड़ेगी।

चित्र 52. सतरहवां सिक्का।

आठवें दिन तेरेंसी को खजाने से 128 आस-सिक्कों के बराबर का सिक्का लाना पड़ा। उसका वजन था 640 ग्राम और उसकी चौड़ाई थी $10^1/_2$ से० मी०

नवें दिन तेरेंसी सम्राट के चरणों तक 256 सिक्कों के तुल्य सिक्का उठा कर लाया। उसका व्यास था 13 से० मी० और वजन $1^1/_4$ कि० ग्राम।

बारहवें दिन सिक्के का व्यास 27 से० मी० था और वजन $10^1/_4$ कि० ग्राम।

सम्राट, जो अबतक सेनापति के साथ मैत्री निभा रहा था, अब अपनी जीत की खुशी नहीं छिपा पा रहा था। वह देख रहा था कि 12 दौर पूरे हो चुके हैं और अभी तक खजाने से सिर्फ दो हजार से कुछ अधिक तांबे के सिक्के निकले हैं।

तेरहवें दिन बहादुर तेरेंसी को 4096 सिक्कों के तुल्य सिक्का मिला। उसका व्यास 34 से० मी० था और वजन $20^1/_2$ कि० ग्राम।

चौदहवें दिन तेरेंसी को 41 कि० ग्राम भारी सिक्का उठाना पड़ा। इसका व्यास 42 से० मी० था।

—तुम थक तो नहीं गये, मेरे बहादुर तेरेंसी? —सम्राट ने मुस्कुराहट छिपाते हुए पूछा।

—नहीं, महाराज —उदास पसीना पोछते हुए सेनापति ने उत्तर दिया।

पंद्रहवाँ दिन आया। इस बार तेरेंसी का बोझ भारी था। 16384 इकाई सिक्कों का एक विशाल सिक्का लेकर वह धीरे-धीरे सम्राट के पास आ रहा था। उसकी चौड़ाई 53 से० मी० थी और वजन था 80 कि० ग्राम—एक हट्टे-कट्टे योद्धा का वजन था यह।

सोलहवें दिन सेनापति बोझ से दबा लड़ाखड़ा रहा था। इस बार उसका सिक्का 32768 इकाई सिक्कों के बराबर था। उसका वजन 164 कि० ग्राम था और व्यास था 67 से० मी०।

सेनापति निःशक्त हाँफ रहा था। सम्राट के होठों पर मुस्कुराहट थी।

जब अगले दिन तेरेंसी दरबार में आया, लोग अपनी हँसी नहीं रोक सके। तेरेंसी अब अपना बोझ उठा नहीं पा रहा था, अतः वह सिक्के को आगे-आगे लुढ़काते हुए चल रहा था। इस सिक्के की चौड़ाई थी 84 से० मी० और वजन था 328 कि० ग्राम। यह 65536 इकाई सिक्कों के बराबर था।

अठारहवाँ दिन तेरेंसी के धन में वृद्धि का अंतिम दिन था। इस दिन के बाद से उसको सिक्के के साथ खजाने से दरबार तक दौड़ लगानी बंद हो गयी। इस बार उसे 131072 इकाई सिक्कों के तुल्य सिक्का मिला था। उसका व्यास एक मीटर से अधिक था और वजन था—655 कि० ग्राम। तेरेंसी अपनी सारी ताकत से भाले को लीवर की तरह इस्तेमाल करता हुआ सिक्के को धकेल रहा था। सिक्का घोर शोर के साथ सम्राट के पैरों के पास लुढ़क गया।

तेरेंसी बिल्कुल थक चुका था।

—बस, अब काफी है...,—उसके मुंह से निकला।

सम्राट मुश्किल से अपनी हँसी रोक सका। उसकी चाल पूरी तरह सफल हो चुकी थी। उसने खजांची को हिसाब लगाने की आज्ञा दी कि तेरेंसी को कितने ब्रास मिलने चाहिये।

खजांची ने तुरत आज्ञा का पालन किया और घोषणा की :

—महाराज, तुम्हारी उदारता से पराक्रमी वीर तेरेंसी इनाम में 262 143 ब्रास प्राप्त करता है।

इस प्रकार कंजूस सम्राट ने तेरेंसी द्वारा मांगी गयी रकम का लगभग 20-वाँ भाग ही दिया।

खजांची के हिसाब को जाँचें। साथ-साथ सिक्कों का वजन भी देखते हैं। तेरेंसी खजाने से लाया :

1 दिन	1 ब्रास जिसका वजन था							5 ग्राम,	
2 »	2	»	»	»	»		»	10	»,
3 »	4	»	»	»	»		»	20	»,
4 »	8	»	»	»	»		»	40	»,
5 «	16	«	»	»	»		»	80	»,
6 »	32	»	»	»	»		»	160	»,
7 »	64	»	»	»	»		»	320	»,
8 »	128	»	»	»	»		»	640	»,
9 »	256	»	»	»	»	1 कि॰ ग्रा॰		280	»,
10 »	512	»	»	»	»	2	»	560	»,
11 »	1024	»	»	»	»	5	»	120	» ‘
12 »	2048	»	»	»	»	10	»	240	»,
13 »	4096	»	»	»	»	20	»	480	»,
14 »	8192	»	»	»	»	40	»	960	»,
15 »	16384	»	»	»	»	81	»	920	»,
16 »	32768	»	»	»	»	163	»	840	»,
17 »	65536	»	»	»	»	327	»	680	»,
18 »	131072	»	»	»	»	655	»	360	».

इस प्रकार के संख्या-क्रमों का योग निकालना हम जानते हैं। पृष्ठ 96 पर दिये गये नियम के अनुसार दूसरे स्तंभ का योग होता है 262 143। तेरेंसी ने सम्राट से 10 लाख दीनार, अर्थात 5 000 000 ब्रास मांगे थे। पर उसे $5\,000\,000 : 262143 \approx 19$ गुना कम सिक्के मिले।

63. **शतरंज के बारे में एक किंवदंती.** शतरंज की गणना प्राचीनतम खेलों में होती है। शताब्दियों से लोग शतरंज खेलते आ रहे हैं, इसलिये कोई आश्चर्य नहीं कि उस के बारे में विभिन्न अनगिनत किंवदंतियां प्रचलित हैं। उनमें से बहुतों की सत्यता बहुत पुरानी होने के कारण जांची नहीं जा सकती है।

ऐसी ही एक किंवदंती हम सुनाना चाहते हैं। इसे समझने के लिये शतरंज का खेल जानना कोई आवश्यक नहीं है। पर्याप्त होगा, यदि आप जानते हैं कि शतरंज एक वर्गाकार गत्ते या तख्ते पर खेला जाता है, जो 64 वर्गों में बटा होता है। इन्हें "घर" कहते हैं। ये घर ब री-ब्रारी से काले और सफेद रंग के होते हैं।

1.

शतरंज का आविष्कार भारत में हुआ था। जब वहाँ के राजा शिव्वराम को खेल दिखाया गया, वे उसकी तर्क-संगतता तथा गोटियों की स्थितियों की अपार विभिन्नता से अत्यंत प्रसन्न हुए।

जब उन्हें पता चला कि आविष्कारक उन्हीं के राज्य का निवासी है, उन्होंने उसे खुद अपने हाथों इनाम देने के लिये बुलाया।

आविष्कारक, उसका नाम सेता था, राजा के पास आया। उसके वस्त्र साधारण थे। वह विद्वान था और शिष्यों को पढ़ा कर जीविका-अर्जन करता था।

– मैं तुम्हारे अनूठे खेल के लिये तुम्हें यथोचित पारितोषिक देना चाहता हूँ, सेता। – राजा ने कहा।

विद्वान ने सर झुका लिया।

– मेरे पास पर्याप्त धन है। मैं तुम्हारी कोई भी इच्छा पूरी कर सकता हूँ, – राजा ने फिर कहा। – मांगों, जो तुम्हारी इच्छा हो।

सेता चुप रहा।

– डरो मत, – राजा ने हिम्मत बंधायी। – तुम अपनी इच्छा बताओ। मैं उसे पूरी करने के लिये सब कुछ न्योछावर कर दूंगा।

– तुम्हारी उदारता महान है, राजन। पर मुझे सोचने के लिये समय दो। कल अच्छी तरह सोचकर तुम्हें अपना अनुरोध बताऊँगा।

जब दूसरे दिन सेता सिंहासन के निकट पहुँचा, उसके अनुरोध की नम्रता ने राजा को आश्चर्यचकित कर दिया।

– राजन, – सेता ने कहा, – आप मुझे शतरंज के पहले घर के लिये गेहूँ का एक दाना दिलाने की आज्ञा दें।

– क्या साधारण गेहूँ का एक दाना? – राजा ने अवाक होकर पूछा।

चित्र 53. "दूसरे घर के लिये दो दाने दिलाने की आज्ञा दें।"

—हाँ, राजन। दूसरे घर के लिये 2 दाने दिलाने की आज्ञा दें, तीसरे के लिये 4, चौथे के लिये—8, पाँचवे के लिये—16, छठे के लिये—32...

—बस करो,—राजा ने क्रोधित होकर उसे बीच ही में रोक दिया।—तुम्हें शतरंज के सारे 64 घरों के लिये दाने मिल जायेंगे। हर घर में दानों की संख्या पिछले घर से दुगुनी होनी चाहिये—यही तुम्हारी इच्छा है न? पर यह जान लो कि ऐसा क्षुद्र इनाम मांग कर तुम मेरी उदारता का अपमान कर रहे हो। गुरू होने के नाते तुम अपने राजा की दयालुता के प्रति आदर-भाव का उत्कृष्ट उदाहरण प्रस्तुत कर सकते थे। जाओ। मेरे सेवक तुम्हारे गेहूँ की बोरी तुम्हें दे देंगे।

सेता मुस्कुराया और दरबार के बाहर महल के द्वार पर प्रतीक्षा करने लगा।

2.

दोपहर भोजन के समय राजा को शतरंज के आविष्कारक की याद आयी और यह जानने के लिये किसी को भेजा कि पागल सेता अपना क्षुद्र इनाम लेकर गया या नहीं।

–राजन, –उत्तर मिला, –तुम्हारी ग्राज्ञा पूरी हो रही है। दरबार के गणितज्ञ दानों की ग्रावश्यक संख्या की गणना कर रहे हैं।

राजा की भृकुटियां तन गयीं। वह इस बात का ग्रादी नहीं था कि उस की ग्राज्ञायें इतनी मंद गति से पूरी हों।

शाम को सोने के पहले जब राजा ने फिर जिज्ञासा की तो उत्तर मिला:

–राजन, तुम्हारे गणितज्ञ गणना में व्यस्त हैं। ग्राशा है कि कल सुबह तक काम खत्म हो जायेगा।

–इतनी देर क्यों लगा रहे हैं? –क्रोधित राजा ने पूछा। –कल नींद टूटने के पहले सेता को उसके एक-एक दाने मिल जाने चाहिये। मैं दो बार ग्राज्ञा नहीं देता।

सुबह राजा को बताया गया कि मुख्य गणितज्ञ एक महत्त्वपूर्ण बात कहना चाहता है।

राजा ने उसे ग्राने की ग्रनुमति दे दी।

–इसके पहले कि तुम ग्रपनी बात कहो, –राजा ने कहा, –मैं जानना चाहूँगा कि सेता को उसका क्षुद्र इनाम मिला या नहीं, जो उसने माँगा था।

–इसी के लिये तो मैं सुबह-सुबह ग्राने का साहस कर पाया हूँ, –वृद्ध गणितज्ञ ने उत्तर दिया। –हम लोगों ने निष्कपट भाव से दानों की पूर्ण संख्या, जो सेता चाहता है, निर्धारित कर ली है। संख्या इतनी बड़ी है कि...

–कितनी भी बड़ी क्यों न हो, –राजा ने घमंड के साथ कहा, –मेरा भंडार कम नहीं होगा। वचन दिया जा चुका है ग्रौर उसे इनाम मिलनी चाहिये...

–तुम्हारे वश की बात नहीं है, राजन, इस तरह की इच्छायें पूरी करना। तुम्हारे सभी भंडारो में इतना गेहूँ नहीं है, जितना सेता ने मांगा है। पूरे राज्य के भंडारों को मिलाकर भी इतना नहीं होगा। सारी पृथ्वी पर भी गेहूँ के इतने दाने नहीं होंगे। यदि प्रतिज्ञा निभाना ही चाहते हो, तो सारी धरती को खेतों में परिणत करने की ग्राज्ञा दो, सागरों को सुखा देने की ग्राज्ञा दो, सुदूर उत्तर को ग्रावृत्त रखने वाले हिम कों गला देने की ग्राज्ञा दो। यदि पृथ्वी के एक-एक ग्रंगुल

स्थान पर गेहूँ बो दें और सारी फसल सेता को दे दें, तब उसे उसका मुंहमांगा इनाम प्राप्त होगा।

आश्चर्यचकित राजा वृद्ध गणितज्ञ के शब्दों को सुनता रहा।

–कैसी है यह संख्या? बताओ तो...,–सोच में राजा ने पूछा।

–एक महाशंख चौरासी शंख छियालिस पद्म चौहत्तर नील चालिस खरब तिहत्तर अरब सत्तर करोड़ पंचान्वे लाख इक्यान्बे हजार छे सौ पंद्रह, हे राजन।

3.

किंवदंती यही है। सच है या झूठ–पता नहीं, पर गणितज्ञों ने इनाम में मिलने वाले गेहूँ के दानों की संख्या सही बतायी थी। यह आप धैर्यपूर्वक गणना कर के खुद देख सकते हैं।

1 से लेकर 1, 2, 4, 8, आदि संख्याओं को जोड़ना है। 63-वीं बार दुगुना करने पर प्राप्त फल 64-वें घर के लिये दानों की संख्या बतायेगा। पृष्ठ 96 पर समझायी गयी विधि द्वारा हम आसानी से दानों की आवश्यक कुल संख्या ज्ञात कर सकते हैं। इसके लिये अन्तिम संख्या को दुगुना कर उसमें से इकाई घटा लेना पड़ेगा। अर्थात परिकलन के लिये हमें सिर्फ 64 बार दो को आपस में गुणा करना है:

$$2\times2\times2\times2\times\ldots \text{ आदि } (64 \text{ बार}).$$

आसानी के लिये दस-दस दुक्कों के छे समूह बना लें। बचे चार दुक्कों को एक समूह में रख लें। दस दुक्कों का गुणन 1024 होता है (आसानी से गुणा कर सकते हैं) और चार दुक्कों का–16। अर्थात इष्ट फल होगा

$$1024\times1024\times1024\times1024\times1024\times1024\times16$$

1024×1024 गुणा करने पर 1 048 576 प्राप्त होता है। अतः अब ज्ञात करना है

$$1\,048\,576\times1\,048\,576\times1\,048\,576\times16$$

का गुणनफल।

गुणन संपन्न करके उसमें से 1 घटा लेने पर हमें दानों की ग्रावश्यक संख्या मिल जायेगी :

18 446 744 073 709 551 615

यदि इस दैत्य संख्या की विराटता का अनुमान लगाना चाहते हैं, तो सोचने की कोशिश करें कि गेहूँ के इतने दानों के लिये कितने बड़े भंडार की ग्रावश्यकता होगी। ज्ञात है कि एक घन मीटर में 150 लाख दाने ग्रायेंगे। ग्रतः शतरंज के ग्राविष्कारक का इनाम 12 000 000 000 000 घन मीटर या 12000 घन कि० मी० स्थान घेरता है। यदि भंडार की ऊँचाई 4 मीटर हो तथा चौड़ाई 10 मीटर हो, तो उसकी लंबाई 300 000 000 कि० मी० होगी – यह पृथ्वी से सूर्य तक की दूरी की दुगुनी है! ...

ऐसा इनाम देना राजा के वश की बात नहीं थी। पर यदि वह गणित ग्रच्छी तरह से जानता, तो कर्ज से छुटकारा प्राप्त कर लेता। इसके लिये सेता को ही एक-एक दाना गिन कर लेने को कहना चाहिये था।

सचमुच यदि सेता खुद गिनना शुरू करता ग्रौर रात-दिन बिना रूके गिनता रहता, तो प्रति सेकेंड एक दाने की दर से 24 घंटों में सिर्फ 86 400 दाने गिनता। दस लाख दाने गिनने के लिये उसे दस दिन-रात से कम नहीं लगते। एक घन मीटर गेहूँ गिनने में छे महीने लग जाते ग्रौर उसे सिर्फ 5 वित्ते (भंडार की लंबाई से) मिलते। दस वर्षों तक बिना रूके गिनने पर उसे 100 वित्ते से ग्रधिक नहीं मिलते। इस प्रकार ग्राप देखते हैं कि सारी जिंदगी गिनने में बिता देने पर भी उसे मांगे गये इनाम का एक क्षुद्रांश ही मिलता।

64. **द्रुत-प्रजनन**. पके पोस्त की गाँठ नन्हे दानों से भरी होती है ग्रौर प्रत्येक से एक पूरा पौधा पनप सकता है। कितने पौधे होंगे, यदि हर दाना ग्रंकुरित होने का ग्रवसर पाये? यह जानने के लिये ज्ञात करना चाहिये कि एक गाँठ में कितने दाने हैं। काम नीरस है पर परिणाम इतना मनोरंजक होगा कि यह किया जा सकता है। ज्ञात होता है कि पोस्त की एक गाँठ में 3000 दाने होते हैं।

इसका मतलब है कि ग्रापके पौधे के ग्रास-पास यदि पर्याप्त जगह

हो तथा जमीन इतनी अच्छी हो कि हर दाना एक पौधे में परिणत हो सके, तो अगली गर्मियों में इस स्थान पर 3000 पौधे उग आयेंगे। एक गाँठ से पोस्त का पूरा खेत मिल जाता!

अब देखें कि आगे क्या होगा। 3000 में से हरेक पौधा कम से कम एक गाँठ देगा (अक्सर एक से अधिक होते हैं)। प्रत्येक में 3 000 दाने मिलेंगे। हर गाँठ के बीज तब 3000 नये पौधे देंगे और दूसरे वर्ष कम से कम

$$3000 \times 3000 = 9\,000\,000 \text{ पौधे होंगे}$$

बताना आसान है कि तीसरे वर्ष हमारे एकमात्र पोस्त के वंशजों की संख्या होगी

$$9\,000\,000 \times 3000 = 27\,000\,000\,000$$

और चौथे वर्ष

$$27\,000\,000\,000 \times 3000 = 81\,000\,000\,000\,000.$$

पाँचवें वर्ष पोस्त के लिये पृथ्वी पर जगह नहीं बचेगी, क्योंकि उनकी संख्या हो जायेगी:

$$81\,000\,000\,000\,000 \times 3000 = 243\,000\,000\,000\,000\,000$$

पृथ्वी पर थल (सारे महादेश और द्वीप मिला कर बनी जमीन) का क्षेत्रफल सिर्फ 1350 लाख वर्ग किलोमीटर या 135 000 000 000 000 वर्ग मीटर है। यह पोस्त की संख्या से 2000 गुना कम है।

आप देखते हैं कि यदि पोस्त के सभी दाने पौधे में परिणत हो सकते, तो पाँच वर्षों में ही सारी पृथ्वी का थल पोस्त की घनी झाड़ियों (2 हजार पौधे प्रति वर्ग मीटर) से भर जाता। पोस्त के नन्हे से दाने में ऐसी दैत्य-संख्या छिपी है!

यदि पोस्त की बजाय बीज से उगने वाले, पर कम बीज देने वाले किसी दूसरे पौधे के लिये उपरोक्त गणना करें, तो फल यही होगा। यह बात दूसरी है कि उसके वंशज पाँच वर्षों में नहीं, बल्कि कुछ अधिक समय में पृथ्वी को ढक सकेंगे। उदाहरण के लिये डैंडेलियन को लेते हैं, जो प्रतिवर्ष लगभग 100 बीज देता है।* यदि सब उग आते, तो हमें मिलता:

---

*डैंडेलियन की एक गाँठ में 200 बीज भी मिले थे।

1 वर्ष	. . . . .	1 पौधा
2 »	. . . . . .	100 »
3 »	. . . . . .	10 000 »
4 »	. , ...	1 000 000 »
5 »	. . . . .	100 000 000 »
6 »	. . . . . .	10 000 000 000 »
7 »	. . . . .	1 000 000 000 000 »
8 »	. . . . . .	100 000 000 000 000 »
9 »	. . . . .	10 000000 000 000 000 पौधे

पृथ्वी पर जितना वर्ग मीटर थल है, उससे यह 70 गुना अधिक है। अतः नवें वर्ष पृथ्वी के हर वर्ग मीटर में डैंडेलियन के 70 पौधे हो जायेंगे।

पर यह भयानक रूप से द्रुत-प्रजनन यथार्थ जीवन में क्यों देखने को नहीं मिलता? क्योंकि बहुत से बीज उगने के पहले ही मृत हो जाते हैं: जमीन अच्छी नहीं होती, या दूसरे पौधों द्वारा दबा दिये जाते हैं, या जीव-जगत उन्हें नष्ट कर देता है। यदि पौधे और बीज बड़े पैमानों पर नष्ट नहीं होते, तो कम ही समय में पृथ्वी हर प्रकार के पौधों से छा जाती।

यह बात सिर्फ पौधों के लिये ही नही, बल्कि जीवों के लिये भी सत्य है। यदि मृत्यु नहीं होती, तो किसी भी जीव के एक जोड़े से उत्पन्न वंशज सारी पृथ्वी को ढक लेते। विराट स्थलों को बिल्कुल आच्छादित करने वाले टिड्डों के दल से आप अनुमान लगा सकते हैं कि यदि मृत्यु जैव-प्रजनन में बाधक नहीं होती, तो क्या होता। किन्हीं एक-दो दशाब्दियों में सारी पृथ्वी करोड़ों जीवों से भर जाती, जो एक दूसरे से स्थान के लिये निरंतर झगड़ते रहते। सागर मछलियों से इस प्रकार भर जाते कि जहाज नहीं चल सकते। हवा नाना प्रकार के कीड़े-मकोड़ों तथा पक्षियों से बिल्कुल अपारदर्शक हो जाती। उदाहरण के लिये, देखें कि सर्वपरिचित घरेलू मक्खी का प्रजनन किस गति से होता है। माना कि हर मक्खी 120 अंडे देती है और एक गर्मी के दौरान उनकी सात पीढ़ियाँ होती हैं, जिसमें आधी मक्खियां मादा होती हैं। माना कि पहली बार अंडे 15 अप्रील को दिये जाते हैं और

20 दिनों बाद मादा इतनी बड़ी हो जाती है कि खुद अंडे दे सकती है। तब प्रजनन का काल-क्रम इस प्रकार होगा :

15 अप्रील – एक मादा ने 120 अंडे दिये। मई के आरंभ में 120 मक्खियां निकलीं, जिसमें 60 मादा मक्खियां थीं;

5 मई – हर मादा मक्खी 120 अंडे देती है; मई के मध्य में – $60 \times 120 = 7200$ मक्खियां निकलती हैं; उनमें से 3600 मादा मक्खियां हैं;

25 मई – 3600 में से प्रत्येक मादा मक्खी 120 अंडे देती है; जून के आरंभ में – $3600 \times 120 = 432\,000$ मक्खियां निकलती हैं, जिनमें 216 000 मादा हैं; 14 जून – 216000 मक्खियों में से प्रत्येक 120 अंडे देती हैं, जून के अंत में 25 920 000 मक्खियां निकलती हैं, जिनमें से 12 960 000 मादा हैं;

5 जुलाई – 12 960 000 मक्खियों में से प्रत्येक 120 अंडे देती है, जुलाई में – 1 555 200 000 मक्खियां निकलती हैं, जिनमें 777 600 000 मादा हैं;

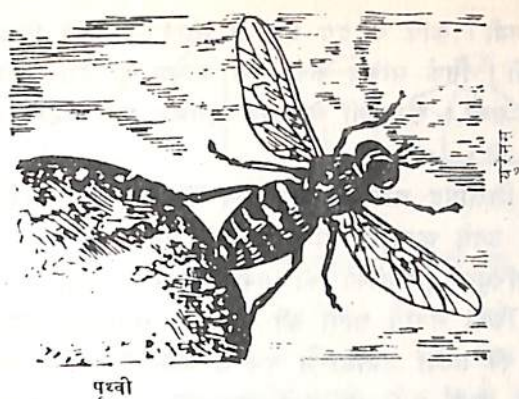
25 जुलाई – 93 312 000 000 मक्खियां निकलती हैं; जिनमें 46 656 000 000 मादा हैं;

13 अगस्त – 5 598 720 000 000 मक्खियां निकलती हैं, जिनमें 2 799 360 000 000 मादा हैं;

1 सितम्बर – 335 923 200 000 000 मक्खियां निकलती हैं।

निर्बाध प्रजनन के फलस्वरूप एक गर्मी के दौरान उत्पन्न मक्खियों की विराट संख्या को दृश्गम्य बनाने के लिये कल्पना करें कि वे पास-पास एक सीधी कतार में बैठी हैं। चूंकि एक मक्खी की लंबाई 5 मि० मी० है, कतार की लंबाई 25000 लाख कि० मी० होगी। यह पृथ्वी से सूरज की दूरी से 18 गुनी अधिक (अर्थात लगभग पृथ्वी से सुदूर ग्रह युरेनस की दूरी) है...

अंत में आपको अच्छी परिस्थितियों में डाले गये जीवों के द्रुत-प्रजनन की कुछ सच्ची घटनाऐं बताते हैं।

अमेरिका में पहले गौरैये नहीं थे। इतनी साधारण चिड़िया संयुक्त-राज्य में इसलिये लायी गयी थी कि वह हानिकारक कीड़े-मकोड़ों को नष्ट करे। ज्ञात है कि गौरैये फसल बरबाद करने वाले कीड़ों के शत्रु

चित्र 54. एक गर्मी के दौरान एक मक्खी की संतति की लड़ी धरती से युरेनस तक पहुँच सकती है।

हैं। नयी जगह गौरैयों को पसंद आ गयी : वहाँ इन चिड़ियों का शिकार करने वाले जीव नहीं थे। गौरैयों की संख्या तेजी से बढ़ने लगी। हानिकारक कीड़े-मकोड़े कम होने लगे। पर जल्द ही गौरैयों की संख्या इतनी अधिक हो गयी कि जीव-जगत में उन्हें खाना नहीं मिलने लगा। और तब उनका आक्रमण वनस्पति-जगत पर हो गया। उन्हों ने खेती बरबाद करना शुरू कर दिया*। अब गौरैयों के साथ संघर्ष शुरू हो गया। यह अमेरिकनों के लिये इतना महँगा पड़ा कि भविष्य के लिये एक कानून बनाया गया, जिसके अनुसार अमेरिका में किसी भी पराये जीव-जन्तु को लाने की मनाही हो गयी।

दूसरा उदाहरण। अस्ट्रेलिया में, जब युरोप निवासियों ने इसकी खोज की, खरगोश नहीं थे। 18-वीं शताब्दी के अंत में वहाँ खरगोश लाये गये। वहाँ भी इनके शिकार करने वाले हिंसक जीव नहीं थे, अतः उनकी संख्या असाधारण तेजी से बढ़ने लगी। जल्द ही सारे आस्ट्रेलिया में खरगोशों की बाढ़ सी आ गयी, जो कृषि के लिये एक

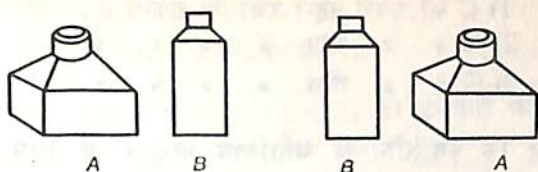
---

*द्वीप-समूह पर उन्होंने दूसरी सभी छोटी चिड़ियों को विस्थापित कर दिया।

प्रकोप बन गयी। कृषि के इस शत्रु से संघर्ष के लिये विशाल राशियां खर्च की गयीं। सिर्फ सक्रिय कदमों के कारण ही इस प्रकोप का कुछ उपशमन हो सका। खरगोशों के साथ लगभग यही घटना कैलीफोर्निया में भी घटी थी।

तीसरी शिक्षाप्रद घटना जमैका द्वीप की है। यहां विषैले सर्पों का बाहुल्य था। उनसे छुटकारा पाने के लिये उनके भयानक शत्रु **सेगिटारियुस सेर्पेंटारियुस** (अफ्रीका की एक सर्प-भक्षी चिड़िया) को लाने का निश्चय किया गया। सांपों की संख्या सचमुच कम हो गयी, पर मैदानी चूहों की संख्या असाधारण रूप से बढ़ने लगी। वे गन्ने की खेती आदि बरबाद करते थे। अब उन्हें नष्ट करने को सोचा जाने लगा। ज्ञात है कि मैदानी चूहों के दुश्मन भारतीय **नेवले** हैं। उनके चार जोड़े लाने का निश्चय किया गया। नेवलों ने नयी मातृभूमि को अपना लिया और जल्द ही पूरे द्वीप में फैल गये। दस साल भी नहीं बीते कि वहां चूहों की संख्या नहीं के बराबर हो गयी। चूहे नहीं मिलने पर नेवले सर्वाहारी बन गये: कुत्तों, बकरियों, सुअर आदि के बच्चों तथा घरेलू चिड़ियों पर आक्रमण करने लगे। और भी अधिक संख्या में हो जाने पर वे फलों के बाग, खेतों में फसल और गन्नों पर आक्रमण करने लगे। निवासियों को अपने कभी के मित्रों के साथ अब संघर्ष शुरू करना पड़ा। लेकिन उन्हें कुछ हद तक ही नेवलों द्वारा हानि को रोकने में सफलता मिल सकी।

65. **मुफ्त का खाना.** दस युवकों ने स्कूल समाप्त करने की खुशी में मिलकर रेस्तरा में खाना खाने का निश्चय किया। रेस्तरां में जब सब आये और खाना टेबुल पर रख दिया गया, उनमें बहस शुरू हो गयी कि टेबुल के चारों ओर कौन कहां बैठे। एक कह रहा था कि नामों के वर्णानुक्रम में बैठना चाहिये। दूसरे ने उम्र के अनुसार बैठने की सलाह दी; किसी ने लंबाई के अनुसार बैठने को कहा, तो किसी ने उत्तीर्णांकों के अनुसार बैठने का प्रस्ताव रखा। बहस लंबी हो रही थी और खाना ठंढा हो रहा था। अंत में बैरे ने यह कह कर सबको शांत किया:

– मेरे युवा मित्रो, अब अपना विवाद बंद करें। आज किसी भी तरह से बैठ लीजिये और मेरी एक बात सुनिये।

चित्र 55. दो वस्तुओं को सिर्फ दो प्रकार से रखा जा सकता है।

जिसे जहां जगह मिली, सब बैठ गये। बैरे ने आगे कहा :

– आप में से कोई एक लिख ले कि आज आप किस क्रम में बैठे हैं। आप कल भी यहां खाना खाने आइये और किसी दूसरे क्रम में बैठिये। परसों फिर किसी तीसरे क्रम से आदि। जिस दिन आप पुनः आज के क्रम में बैठेंगे, मैं प्रतिज्ञा करता हूँ कि उस दिन से हर रोज यहां का सबसे स्वादिष्ट खाना आप सबों को मुफ्त में खिलाया करूँगा।

प्रस्ताव सब को पसंद आया। निश्चय किया गया कि रेस्तरा में हर दिन आकर विभिन्न क्रमों से बैठा जाये, ताकि जल्द ही वह दिन आ जाये, जब मुफ्त का खाना मिले।

पर उन्हें इस दिन की प्रतीक्षा नहीं करनी पड़ी। इसलिये नहीं कि बैरे ने अपनी प्रतिज्ञा पूरी नहीं की, बल्की इसलिये कि टेबुल पर बैठने के विभिन्न क्रमों की संख्या विराट है। यह संख्या है : 3 628 800। दिनों की इतनी बड़ी संख्या का अर्थ है – लगभग 10000 वर्ष!

आपको शायद यह असंभव प्रतीत हो रहा होगा कि सिर्फ दस व्यक्तियों के बैठने के विभिन्न क्रमों की संख्या इतनी बड़ी हो सकती है। परिकलन की जांच आप खुद कर लें।

सबसे पहले आपको क्रमचयों की संख्या निर्धारित करना सीखना होगा। सरलता के लिये पहले कम से कम तीन वस्तुओं के लिये परिकलन करें। माना कि उनके नाम हैं A, B और C।

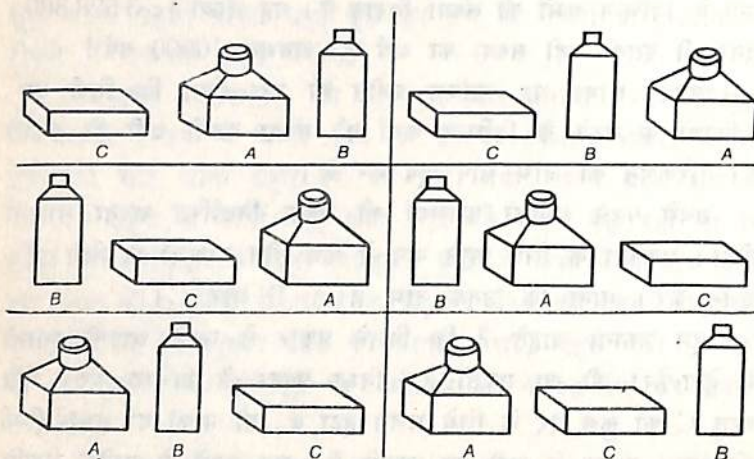
हम जानना चाहते हैं कि कितने प्रकार से उनके आपसी स्थानों में हेरा-फेरी की जा सकती है। निम्न प्रकार से विचार करें। यदि वस्तु C को कुछ देर के लिये अलग हटा दें, तो बाकी दो वस्तुयें सिर्फ दो भिन्न प्रकार से रखी जा सकती हैं। अब इनमें से प्रत्येक स्थिति में उनके साथ वस्तु C रखें। यह तीन प्रकार से किया जा सकता है :

1) C को उनके पहले रखा जा सकता है,
2) C » » बाद » » » »
3) C » » बीच » » » »

स्पष्ट है कि इन तीन के अतिरिक्त वस्तु C के लिये कोई अन्य जगह नहीं ढूढ़ी जा सकती है। चूंकि हमारे पास दो वस्तुओं की दो स्थितियां (AB और BA) हैं, तो तीनों वस्तुओं का क्रमचयन $2 \times 3 = 6$ प्रकार से हो सकता है।

क्रमचयन की ये सारी विधियां चित्र 56 में दिखायी गयी हैं। अब आगे बढ़ें – 4 वस्तुओं के लिये गणना करें।

माना कि हमारे पास 4 वस्तुएं हैं : A, B, C और D। पुनः एक वस्तु, जैसे D, को अलग रख दें और बाकी का क्रमचयन ज्ञात करें। तीन वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या 6 है। हर क्रमचय में चौथी वस्तु के लिये कितने स्थान संभव हैं? स्पष्ट है कि 4 स्थानों पर रखा जा सकता है :

1) D को तीनों वस्तुओं के पहले ;
2) D को तीनों वस्तुओं के बाद ;
3) D को पहली तथा दूसरी वस्तुओं के बीच ;
4) D को दूसरी तथा तीसरी वस्तुओं के बीच।

चित्र 56. तीन वस्तुओं को छः प्रकार से रख सकते हैं।

कुल प्राप्त होते हैं

$$6 \times 4 = 24 \text{ क्रमचय}$$

और चूंकि $6 = 2 \times 3$ और $2 = 1 \times 2$, तो क्रमचयों की कुल संख्या को निम्न गुणन के रूप में व्यक्त कर सकते हैं :

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

इस विचारानुगमन से 5 वस्तुओं का क्रमचय निर्धारित कर सकते हैं :

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.$$

6 वस्तुओं के लिये

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720.$$

अब खाना खाने के लिये बैठे 10 व्यक्तियों की ओर वापस लौटें। उनके क्रमचयों की संख्या ज्ञात हो सकती है, यदि हम निम्न गुणन पूरा करने का श्रम करें :

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10.$$

गुणन करने पर हमें उपरोक्त संख्या 3628800 प्राप्त होगी।

परिकलन अधिक जटिल होता, यदि 10 व्यक्तियों में 5 लड़कियां होतीं और हर लड़की दो युवकों के बीच बैठना पसंद करती। यहां क्रमचयों की संख्या काफी कम है, पर उसका परिकलन जटिल है।

माना कि एक युवक 10 में से किसी भी कुर्सी पर बैठ जाता है। अन्य चार युवक लड़कियों के लिये जगह छोड़-छोड़ कर $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ विभिन्न प्रकार से बैठ सकते हैं। चूंकि कुर्सियों की कुल संख्या 10 है, पहला युवक 10 विभिन्न प्रकार से बैठ सकता है; अर्थात पांचों युवकों के लिये कुल क्रमचयों की संख्या $10 \times 24 = 240$ है। 5 लड़कियां कितने प्रकार से बैठ सकती हैं? स्पष्ट है कि $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ विधियों से। युवकों के लिये 240 क्रमचयों में से प्रत्येक को लड़कियों के लिये 120 क्रमचयों के साथ मिलाया जाये, तो इष्ट क्रमचयों की संख्या होगी

$$240 \times 120 = 28\,800$$

पिछली संख्या से यह काफी कम है और इतने क्रमों से बैठने के लिये सिर्फ 79 वर्ष लगते। सौ साल तक जीने पर इन लोगों को यदि उस बैरे से नहीं, तो उस के वंशज से मुफ्त का खाना मिल जाता।

क्रमचयों की गिनती करना सीख लेने पर हम "15 के खेल" में गोटियों का विभिन्न क्रमचय ज्ञात कर सकते हैं।* अन्य शब्दों में, हम उन सभी प्रश्नों की संख्या ज्ञात कर ले सकते हैं, जो इस खेल के लिये बनाये जा सकते हैं। समझना सरल है कि गणना का यहाँ अर्थ है– 15 वस्तुओं के सभी क्रमचयों को ज्ञात करना। इसके लिये, जैसा कि अब हम जानते हैं, निम्न गुणनफल ज्ञात करना होगा :

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times 15$$

गुणन करने पर निम्न फल प्राप्त होता है :

1 307 674 365 000

अर्थात् 13 खरब से अधिक।

इनमें से आधे प्रश्न हलातीत हैं। अर्थात् इस खेल में 6 खरब से अधिक हलातीत क्रमचय हैं। इससे "15 के खेल" द्वारा मनबहलाव की महामारी का कारण समझा जा सकता है। लोगों को संदेह भी नहीं होता था कि हलातीत प्रश्नों की संख्या इतनी बड़ी हो सकती है।

ध्यान दें कि यदि प्रति सेकेंड गोटियों को नया क्रमचय देना संभव होता तो सभी क्रमचय देखने के लिये दिन-रात अविराम कार्यरत रहने पर 40 000 वर्षों से अधिक व्यतीत करने पड़ते।

क्रमचयों की संख्या के विषय में यह बातचीत हम स्कूली जीवन के इस प्रश्न से समाप्त करेंगे :

कक्षा में 25 छात्र हैं। कितने प्रकार से उन्हें बैठाया जा सकता है?

जो अबतक कही गयी बातें समझ चुके हैं, उनके लिये यह प्रश्न हल करना कठिन नहीं है : बस इन 25 संख्याओं को आपस में गुणा कर देना है :

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times 23 \times 24 \times 25.$$

---

*इसमें खाली घर हमेशा दायें निचले कोने में होना चाहिये।

गणित अनेक परिकलनों को सरल करने की विधियाँ बताता है, पर इस प्रकार की क्रियाओं को (जैसे यह गुणन) सरल करने की कोई विधि उस के पास नहीं है।* सिर्फ गुणनखंडों के सांयोगिक खुशनसीब समूहीकरण ही परिकलन-काल को कुछ कम कर सकते हैं। गुणनफल काफी विशाल है। उसमें 26 अंक हैं। इतनी बड़ी संख्या की हम कल्पना भी नहीं कर सकते :

15 511 210 043 330 985 984 000 000.

अब तक मिली सभी संख्याओं में यह निस्संदेह सबसे बड़ी संख्या है और इसे "दैत्य-संख्या" कहलाने का सबसे अधिक अधिकार है। पृथ्वी पर सभी सागरों और नदियों के पानी की छोटी से छोटी बूंदों की कुल संख्या भी इसके सामने कुछ नहीं है।

66. **सिक्कों की हेरा-फेरी.** मुझे याद है कि बचपन में बड़े भाई ने सिक्कों का एक मनोरंजक खेल दिखाया था। उसने तीन तश्तरियाँ

---

* वैसे गुणनफल का **समीपवर्ती** मान अपेक्षाकृत सरलता से ज्ञात किया जा सकता है। गणित में 1 से लेकर किसी संख्या n तक का गुणनफल प्राप्त करने की आवश्यकता अक्सर पड़ती रहती है। इस प्रकार के गुणन को n! द्वारा व्यक्त करते हैं और इसे क्रमानुगुणित (factorial) n कहते हैं। उदाहरण के लिये, उपरोक्त गुणन को हम संक्षेप में 25 से व्यक्त कर सकते हैं। 18-वीं शताब्दी में अंग्रेज गणितज्ञ स्टिर्लिंग ने क्रमानुगुणितों का समीपावर्त्ती मान निकालने के लिये सूत्र निर्धारित किया था, जिसका रूप निम्न :

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

जहां $\pi = 3.141\ldots$, $e = 2.718\ldots$ – ये वे संख्यायें हैं, जो गणित के विभिन्न प्रश्नों में अत्यंत महत्त्वपूर्ण भूमिकायें निभाती हैं। लघुगणकों या घातप्रमापकों की सारणी (logarithmic tables) की मदद से स्टिर्लिंग के सूत्र द्वारा सरलतापूर्वक ज्ञात कर सकते हैं कि

$$25! \approx 1.55 \cdot 10^{25}$$

कतार में पास-पास रख दी और किनारे की एक तश्तरी में 5 सिक्कों का एक पिरामिड बना दिया। सबसे नीचे एक रूबल का सिक्का था, था, उसके ऊपर 50 कोपेक का, उसके ऊपर 20 का, उसके ऊपर 15 का और सबसे ऊपर 10 का सिक्का था।

– इन सिक्कों को तीसरी तश्तरी में इसी क्रम में रखना है। यह करते वक्त तीन नियमों को ध्यान में रखना होगा। पहला नियम: एक बार में सिर्फ एक सिक्के को उठा कर रखा जा सकता है। दूसरा नियम: छोटे सिक्के पर बड़ा सिक्का कभी नहीं रखना है। तीसरा नियम: उपरोक्त नियमों का पालन करते हुए सिक्कों को अस्थायी तौर पर बीच की तश्तरी में भी रखा जा सकता है, पर खेल के अंत में सभी सिक्के तीसरी तश्तरी में आ जाने चाहिये और उनका क्रम आरंभ की भाँति होना चाहिये। नियम तुम देख रहे हो कि कठिन नहीं हैं। अब काम शुरू कर सकते हो।

मैंने हेरा-फरी शुरू की। 10-कोपेकी सिक्के को तीसरी तश्तरी में रखा, 15-कोपेकी को बीच की तश्तरी में रखा और अटक गया। 20-कोपेकी को कहां रखा जाये? वह 10-कोपेकी और 15-कोपेकी – दोनों से ही बड़ा है।

– इससे क्या हुआ? – भाई ने मदद की। – 10-कोपेकी बीच की तश्तरी में 15-कोपेकी पर रख दो। 20-कोपेकी के लिये तीसरी तश्तरी में जगह बन जायेगी।

मैंने ऐसा ही किया। पर आगे चलकर दूसरी समस्या खड़ी हुई। 50-कोपेकी कहाँ रखा जाये? पर मैं शीघ्र ही भाँप गया; पहले 10-कोपेकी को पहली तश्तरी में रखा, फिर 15-कोपेकी को तीसरी में और इस के बाद 10-कोपेकी को तीसरी में। अब 50-कोपेकी को बीच की खाली तश्तरी में रखा जा सकता था। इस प्रकार हेरा-फेरी के एक लंबे क्रम के बाद मैं पाँचों सिक्कों को तीसरी तश्तरी में पहले की भाँति एक के ऊपर एक रखने में सफल हो गया।

– कुल कितनी हेरा-फेरी करनी पड़ी तुम्हें? – भाई ने मेरे काम की सराहना करते हुए पूछा।

– मैंने गिना नहीं है।

– आओ, गिनते हैं। यह जानना मनोरंजक होगा कि लक्ष्य तक

पहुँचने के लिये चालों(हेरा-फेरी) की न्यूनतम संख्या क्या हो सकती है। यदि पिरामिड में 5 की जगह सिर्फ 2 सिक्के 10-कोपेकी और 15-कोपेकी होते, तो कितनी चालों की आवश्यकता पड़ती?

– तीन की: 10-कोपेकी को बीच की तश्तरी में, 15-कोपेकी – तीसरी में और 10-कोपेकी को तीसरी में।

– ठीक है। एक और सिक्का – 20-कोपेकी – लेते हैं और देखते हैं कि तीन सिक्कों को पहली से तीसरी तश्तरी तक लाने में कितनी चालों की आवश्यकता पड़ेगी। ऐसा करते हैं: पहले ऊपर के ो छोटे सिक्कों को बीच की तश्तरी में लाते हैं। हम जानते हैं कि इसमें 3 चालें लगती हैं। फिर 20-कोपेकी को तीसरी में रखते हैं – 1 चाल। इसके बाद बीच की तश्तरी से दोनों सिक्कों को तीसरी में लाते हैं। इसमें पुनः 3 चालें लगती हैं। कुल चालें $3+1+3=7$ हुईं।

– चार सिक्कों के लिये आवश्यक चालों की संख्या मुझे स्वयं गिनने दो। पहले तीन छोटे सिक्कों को बीच की तश्तरी में लाता हूँ – 7 चालें होती हैं। फिर 50-कोपेकी को तीसरी खाली तश्तरी में रखता हूँ – 1 चाल हुई। और अंत में तीनों छोटे सिक्कों को बीच से उठा कर तीसरी तश्तरी में रखते हैं – पुनः 7 चालें मिलती हैं। कुल चालें हुईं: $7+1+7=15$.

– बहुत अच्छे। और पाँच सिक्कों के लिये?

$15+1+15=31$, – मैंने झट उत्तर दिया।

– बस, अब तुम गिनने का आसान तरीका समझ गये हो। पर मैं तुम्हे दिखाता हूँ कि इसे और सरल कैसे किया जा सकता है। ध्यान दो कि जो संख्यायें हमें मिली हैं, वे दो को दो से एक बार या कई बार गुणा कर के एक घटाने से भी मिल सकती हैं। देखो।

और भाईने सारणी बनायी:

$$3=2\times2-1$$
$$7=2\times2\times2-1$$
$$15=2\times2\times2\times2-1$$
$$31=2\times2\times2\times2\times2-1.$$

– मैं समझ रहा हूँ। जितने सिक्के होते हैं, उतनी बार 2 को गुणनखंडों के रूप में लेते हैं और उसमें से इकाई घटा देते हैं। अब

चित्र 57. "पुजारियों को छल्लों की अविराम हेरा-फेरी करनी थी।"

मैं सिक्कों की किसी भी संख्या के लिये कुल चालों की संख्या बता सकता हूँ। उदाहरणार्थ, 7 सिक्कों के लिये :

$$2\times2\times2\times2\times2\times2\times2-1=128-1=127.$$

—अब तुम इस प्राचीन खेल को अच्छी तरह से समझ गये हो। सिर्फ एक व्यावहारिक नियम तुम्हें बता दूं : यदि पिरामिड में सिक्कों की संख्या विषम हो, तो पहले सिक्के को तीसरी तश्तरी में रखते हैं और यदि सिक्कों की संख्या सम हो, तो—बीच की तश्तरी में।

—तुमने कहा कि यह प्राचीन खेल है। क्या इसे तुमने खुद सोच कर नहीं निकाला है?

—नहीं, मैंने सिर्फ इसे सिक्कों के लिये लागू किया है। खेल अत्यंत प्राचीन है और कहते हैं कि इसका जन्म भारत में हुआ था। खेल से संबंधित एक रोचक किंवदंती है। वाराणसी शहर में शायद कोई मंदिर है, जिसमें हिन्दुओं के भगवान ब्रह्मा ने विश्व की सृष्टि करने के बाद हीरे की तीन छड़ियाँ जड़ दी और एक पर उसने सोने के 64 छल्ले चढ़ा दिये : सबसे बड़ा छल्ला सबसे नीचे था और हर छल्ला अपने

निचले से छोटा था। मंदिर के पुजारियों को दिन-रात बिना रुके इन छल्लों को दूसरी छड़ी पर उसी क्रम से पहनाने का कार्य सौंपा गया। इसके लिये वे तीसरी छड़ी की मदद ले सकते थे। उनके इस काम के लिये निर्धारित नियम हमारे खेल के नियमों जैसे ही थे: एक बार में एक ही छल्ला उठा कर पहनाया जा सकता था ग्रौर छोटे छल्ले पर बड़ा छल्ला नहीं रखा जा सकता था। किंवदंती कहती है कि जब यह काम पूरा हो जायेगा, ग्रर्थात सारे 64 छल्ले जब दूसरी छड़ी पर पहना दिये जायेंगे, तब प्रलय ग्रा जायेगा।

—ग्रोहो, मतलब कि यदि कथा का विश्वास करें, तो दुनिया को कब के खत्म हो जाना चाहिये था!

—तुम शायद सोचते हो कि 64 छल्लों को दूसरी छड़ी पर पहनाने में ग्रधिक समय नहीं लगना चाहिये?

—ग्रौर नहीं तो क्या! यदि एक सेकेण्ड में एक चाल चलें, तो एक घंटे में 3600 चालें चली जा सकती हैं।

—इससे क्या होता है?

—दिन भर में—करीबन एक लाख चालें होंगी। दस दिनों में दस लाख। मुझे विश्वास है कि इतनी चालों में हजार छल्ले भी एक छड़ी से दूसरी पर पहनाये जा सकते हैं।

—तुम गलत हो। 64 छल्ले दूसरी छड़ी पर पहनाने के लिये 5 खरब वर्ष चाहिये।

—क्यों ग्राखिर? चालों की कुल संख्या 64 बार ही तो लिये गये दो का गुणनफल है, ग्रौर यह होगा...। ठहरो, ग्रभी गुणा कर के बताता हूँ।

—ग्रच्छी बात है। जबतक तुम गुणा करो, मैं ग्रपने काम निपटा ग्राऊँ।

ग्रौर भाई मुझे गुणा करने में मशगूल छोड़कर चला गया। मैंने पहले 16 बार दो को ग्रापस में गुणा किया, फिर प्राप्त संख्या को उसी से गुणा कर दिया। प्राप्त संख्या को पुनः स्वयं से गुणा कराया। ग्रौर ग्रंत में, इस ग्रन्तिम गुणनफल से इकाई घटाना नहीं भूला।

मुझे निम्न संख्या प्राप्त हुई:

18 446 744 073 709 551 615 *

मतलब की भाई सही था...

आपके लिये शायद जानना रुचिकर होगा कि विश्व की उम्र किन संख्याओं में आँकी जाती है। वैज्ञानिकों के पास इस संबंध में कुछ समीपवर्ती आँकड़े हैं (सही आँकड़े प्राप्त करना निस्सन्देह असंभव है):

सूर्य विद्यमान है	5 000 000 000 000 वर्षों से
पृथ्वी	3 000 000 000 »
पृथ्वी पर जीवन	1 000 000 000 »
मनुष्य	कम से कम 500 000 »

67. बाजी. विश्राम-गृह के भोजनालय में खाने के वक्त बात चली कि घटनाओं की **संभाव्यता** कैसे ज्ञात की जाती है। संयोगवश उनके बीच एक युवा गणितज्ञ भी था। उसने जेब से एक सिक्का निकाला और कहा:

– मैं टेबुल पर बिना देखे सिक्का उछालता हूँ। इसके चित गिरने की क्या संभाव्यता है?

– पहले यह तो समझाइये कि "संभाव्यता" है क्या, आवाजें आयीं। – सब इसे नहीं जानते।

चित्र 58. "सिक्का दो तरह से टेबुल पर गिर सकता है।"

---

* पाठक इस संख्या से परिचित है: यह शतरंज के आविष्कारक के इनाम को व्यक्त करती है।

–यह बहुत सरल है! सिक्का दो तरह से गिर सकता है (चित्र 58) : चित या पट।

सिर्फ ये ही दो स्थितियां संभव हैं। अब निम्न अनुपात निकालते हैं

$$\frac{\text{इष्ट स्थितियों की संख्या}}{\text{सारी संभव स्थितियों की संख्या}} = \frac{1}{2}$$

अंश (अनुपात) $^1/_2$ ही सिक्के के चित गिरने की संभाव्यता व्यक्त करता है।

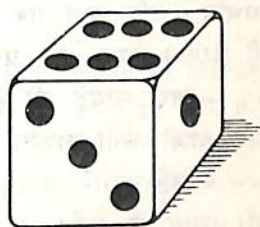
–सिक्के के साथ तो आसान है, – किसी ने बीच में टोका। – कोई जटिल समस्या लें, जैसे छक्का।

–आइये, देखते हैं, – गणितज्ञ तैयार हो गया। छक्का (चित्र 59) एक घन है, जिसकी फलिकाओं पर 1 से 6 तक की संख्यायें होती हैं। छक्का उछालने पर कोई विशेष संख्या, जैसे छः, ऊपर आयेगी, इसकी क्या संभाव्यता है? सभी संभव स्थितियों की क्या संख्या है यहाँ? घन अपनी छे फलिकाओं में से किसी पर भी गिर सकता है, अर्थात् कुल 6 स्थितियाँ संभव हैं। इनमें से इष्ट स्थिति सिर्फ एक है – कि छः आये। इस प्रकार, संभाव्यता 1 में 6 से भाग देने पर प्राप्त हो जायेगी। संक्षेप में कह सकते हैं कि वह अनुपात $^1/_6$ द्वारा व्यक्त होती है।

–क्या हर बात की संभाव्यता का परिकलन संभव है? – एक महिला ने पूछा। ऐसा उदाहरण लें। मैं कहती हूँ : अभी खिड़की से हम जिस पहले गुजरने वाले व्यक्ति को देखेंगे, कोई पुरुष होगा। इस बात की कितनी संभाव्यता है?

–इसकी संभाव्यता संभवतः आधी है, यदि मान लें कि साल भर का बच्चा भी पुरुषों में गिना जाता है। दुनिया में पुरुषों और स्त्रियों की संख्या बराबर है।

–और इसकी क्या संभाव्यता होगी कि पहले दो गुजरने वालों में से दोनों ही पुरुष होंगे? – किसी और ने पूछा।

–इसका परिकलन कुछ लोगों के लिये थोड़ा जटिल हो सकता है। पहले सभी संभव स्थितियों को देखें। प्रथमतः, संभव है कि

चित्र 59 छक्का।

दोनों ही पुरुष हों। दूसरे, पहले पुरुष गुजरता है, फिर स्त्री गुजरती है। तीसरे, इसके विपरीत, पहले स्त्री गुजरती है, फिर पुरुष गुजरता है। और अंत में, दोनों ही औरते हैं। इस प्रकार, सभी संभव स्थितियों की संख्या 4 हुई। इनमें से इष्ट सिर्फ पहली स्थिति है। अतः इसकी संभाव्यता $^1/_4$ अंश होगी। यह रहा आपके प्रश्न का उत्तर।

—समझ गया। पर **तीन** पुरुषों का भी प्रश्न हो सकता है: क्या संभाव्यता है कि प्रथम तीन गुजरने वालों में से **तीनों** ही पुरुष होंगे?

—इसे भी हल कर लेंगे। इस बार भी शुरू करते हैं सभी संभव स्थितियों की गणना से। दो गुजरने वालों के लिये सभी संभव स्थितियों की संख्या हमने 4 निर्धारित की है। यदि यहां तीसरे गुजरने वाले को भी मिला लिया जाये, तो सभी संभव स्थितियों की संख्या दुगुनी हो जायेगी, क्योंकि उपरोक्त चारों स्थितियों के साथ या तो स्त्री होगी या पुरुष होगा (तीसरा व्यक्ति)। अतः सभी संभव स्थितियों की कुल संख्या यहां $4 \times 2 = 8$ है। इष्ट स्थिति सिर्फ एक है, अतः इसकी संभाव्यता $\frac{1}{8}$ होगी। यहां परिकलन का नियम साधारण है: दो गुजरने वाले लोगों की स्थिति में संभाव्यता $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ थी; तीन की स्थिति में $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$; चार की स्थिति में चार अर्द्धों का गुणनफल, आदि। संभाव्यता, जैसा कि आप देख रहे हैं, घटती ही जा रही है।

—दस गुजरने वाले लोगों की स्थिति में संभाव्यता क्या होगी?

—अर्थात्, इसकी क्या संभाव्यता है कि पहले दस गुजरनेवाले लोगों में से सभी पुरुष होंगे? देखें कि दस अर्द्धों का आपसी गुणनफल कितना होता है। यह $\frac{1}{1024}$, अर्थात, सहस्त्रांश से कुछ कम है। अर्थात्, यदि आप एक रूबल की शर्त्त लगाते हैं कि यह होगा, तो मैं 1000 रूबल की बाजी लगाने को तैयार हूँ कि यह नहीं होगा।

—शर्त्त फायदे की है। मैं 1000 रूबल जीतने के लिये एक रूबल की बाजी लगा सकता हूँ। —किसी ने कहा।

—लेकिन मेरे जीतने की संभावना हजार गुनी अधिक है, इसे भी तो ध्यान में रखें।

—कोई फर्क नहीं पड़ता। एक हजार जीतने के लिये एक रूबल का

खतरा इस बात के लिये भी मोल ले सकता हूँ कि पहले गुजरने वाले दस लाख लोगों में सभी पुरुष हैं।

—और आप कल्पना कर सकते हैं कि इस घटना की संभाव्यता कितनी कम है? — गणितज्ञने पूछा।

—कोई करोड़वाँ भाग होगा और क्या।

—इससे भी बहुत कम! करोड़वाँ भाग तो करीब 20 गुजरने वालों के लिये होगा। सौ गुजरने वालों के लिये... अभी बताता हूँ, जरा कागज-पेन्सिल दें तो। एक अरब... खरब... नील... महा-शंख... ओहो! एक पर तीस शून्य!

—बस, इतना ही?

—एक पर तीस शून्य कम लग रहे हैं क्या? इतनी तो सागर में बूंदें भी नहीं होंगी।

—संख्या बड़ी है, इसमें कोई शक नहीं! कितना आप दाँव पर रखने के लिये तैयार हैं मेरे एक रूबल की शर्त्त के लिये?

—हा.. हा! सब कुछ! सब कुछ, जो मेरे पास है।

—सब कुछ तो बहुत हो गया। आप अपनी सायकिल ही रख दीजिये। डरते हैं?

—बिल्कुल नहीं। आप चाहते हैं, तो सायकिल ही सही। मैं कोई खतरा मोल नहीं ले रहा हूँ।

—मैं भी कोई खतरा मोल नहीं ले रहा हूँ। एक रूबल की ही तो बात है। पर पूरी सायकिल जीतने की उम्मीद है। आप जीतेंगे तो आपको लगभग कुछ भी नहीं मिलेगा।

—पर आप बात तो समझिये। आप जरूर हारेंगे। सायकिल आपके हाथ कभी नहीं आयेगी और आपका रूबल समझ लीजिये कि मेरी जेब में आ चुका है।

—आप कर क्या रहे हैं? —गणितज्ञ के मित्र ने रोकने की कोशिश की। —एक रूबल के लिये अपनी सायकिल खतरे में डाल रहे हैं। यह पागलपन है।

—उल्टा, —गणितज्ञ ने उत्तर दिया, —ऐसी स्थिति में एक रूबल की भी शर्त्त लगाना पागलपन है। हार अवश्यंभावी है! यह रूबल को सीधा पानी में फेंकने के बराबर होगा।

–पर कम से कम एक संयोग की तो आशा की जा सकती है?

–आपका यह संयोग सागर में एक बूंद के बराबर भी नहीं है। और मेरे पक्ष में दस सागर हैं। मेरी जीत दो-दुने-चार की भाँति स्पष्ट है।

–सनक में मत बहिये, –यह शांत आवाज वृद्ध की थी, जो अब तक चुपचाप बैठा बहस सुन रहा था। –आप गलत हैं।

–कैसे? प्रोफेसर साहेब, क्या आप भी साधारण लोगों की तरह सोच रहे हैं?

–आप ने यह तो सोचा ही नहीं कि यहां सभी स्थितियाँ समान मूल्य नहीं रखतीं। संभाव्यता की गणना कैसी स्थितियों के लिये की जाती है? जिनकी संभाव्यता समान हो। और दी गयी परिस्थितियों में... खैर छोड़िये, – प्रोफेसर ने ध्यान से कुछ सुनते हुए कहा, – वास्तविकता अभी स्वयं आपकी गलती बता देगी। लगता है कि युद्ध-संगीत का वादन हो रहा है, है न?

–युद्ध-संगीत से इसका क्या संबंध है?..–युवा गणितज्ञ कहने ही ही वाला था, पर चुप रह गया। उसका चेहरा भयभीत हो उठा। वह अपनी जगह से उछल कर खिड़की के पास गया और बाहर झाँकने लगा।

–आप सही हैं। – उसका उदास स्वर सुनायी दिया। – बाजी हार चुका हूँ! विदा, मेरी सायकिल...

मिनट भर बाद सब समझ गये कि बात क्या है। खिड़की के सामने से सैनिकों का एक बटालियन गुजर रहा था।

68. **दैत्य-संख्यायें – हमारे भीतर और बाहर.** दैत्य-संख्याओं का दर्शन करने के लिये किसी स्थिति-विशेष की खोज आवश्यक नहीं है। वे हमारे इर्द-गिर्द और यहां तक कि हमारे भीतर भी, हर जगह, विराजमान हैं। सिर्फ हमें देखना आना चाहिये। आकाश, जिसके नीचे हम जी रहे हैं; रेत, जिसपर हम चलते हैं; वायु, जिसमें हम साँस ले रहे हैं और रक्त, जो हमारी धमनियों में बहता है – ये सब दैत्य-संख्याओं को अपने भीतर अदृश्य छिपा कर रखते हैं। अंतरिक्ष में छिपी दैत्य-संख्यायें अधिकांश लोगों के लिये कोई नयी बात नहीं हैं। चाहे आप तारों की संख्या की बात करें या उनकी दूरियों की, उनके आकार

की, वजन की या उनकी उम्र की,– हर हालत में अपनी विराटता से आपकी कल्पना-शक्ति कुंद करने का सामर्थ्य रखने वाली संख्यायें दृष्टिगोचर होंगी। "अंतरिक्षी संख्या"– रूसी में इसे यूं ही मुहावरे की तरह नहीं प्रयुक्त किया जाता। पर बहुत से लोग यह नहीं जानते कि जिन आकाश-पिंडों को खगोलशास्त्री "लघु" की संज्ञा देते हैं, वे भी हमारी पार्थिव इकाइयों की तुलना में विशाल ही हैं। हमारे सौर-मंडल में ही कुछ ग्रह हैं, जिन्हें खगोलविद् उनके छोटे आकार के कारण "नन्हा" कहते हैं। उनमें ऐसे भी हैं, जिनके व्यास कुछ किलोमीटरों में मापे जाते हैं। बड़े विशाल पैमानों के आदी होने के कारण खगोलविद उपेक्षा से उन्हें "नन्हा" कह कर पुकारते हैं। पर वे सिर्फ अन्य आकाश-पिंडों की तुलना में नन्हे हैं। मानवीय माप-दंडों की तुलना में वे बिल्कुल नन्हे नहीं हैं। उदाहरण के लिये एक "नन्हे" ग्रह को लें, जिसका व्यास 3 कि० मी० है। रेखागणित के नियमों द्वारा हम ज्ञात कर सकते हैं कि इसकी सतह का क्षेत्रफल 28 वर्ग कि० मी०, या 28 000 000 वर्ग मी० होगा। एक वर्ग मीटर जमीन पर 7 आदमी खड़े हो सकते हैं। अतः 280 लाख वर्ग मीटर की सतह पर 1960 लाख व्यक्तियों को जगह मिल जायेगी।

रेत भी, जिसपर हम चलते हैं, हमें दैत्य-संख्याओं के देश की सैर करा सकता है। "रेत-कणों की तरह असंख्य" या "बालुका-राशि" मुहावरे भी निराधार नहीं हैं और ये काफी प्राचीन मुहावरे हैं। फिर भी प्राचीन काल के लोगों ने रेत-कणों की संख्या को तारों की संख्या के बराबर मान कर उसकी विराटता का अवमूल्यन ही किया है। पुराने जमाने में दूरदर्शक नहीं थे और नंगी आँखों से सिर्फ 3500 के लगभग तारे (आकाश के एक गोलार्द्ध में) दिखते हैं। समुद्र-तटों पर बालू-कणों की संख्या इससे कहीं अरबों गुनी अधिक है।

सही मायने में दैत्य-संख्यायें हवा में छिपी हैं, जिसमें हम साँस लेते हैं। हवा के प्रत्येक घन से० मी० में 27 शंख (अर्थात् 27 पर 18 शून्य) नन्हे कण हैं, जिन्हें अणु कहते हैं।

आप कल्पना नहीं कर सकते कि यह कितनी बड़ी संख्या है। यदि दुनिया में इतने लोग होते, तो उनके लिये हमारे ग्रह पर जगह नहीं होती। महादेशों, सागरों आदि सबको मिला कर पृथ्वी-तल का क्षेत्रफल

5000 लाख वर्ग कि० मी० है। इसे वर्ग मीटर में परिणत करें तो प्राप्त होगा.

500 000 000 000 000 वर्ग मीटर।

इससे 27 शंख में भाग देने पर प्राप्त होता है 54000। अर्थात् पृथ्वी-तल के प्रति वर्ग मीटर पर 50000 से भी अधिक व्यक्ति होते!

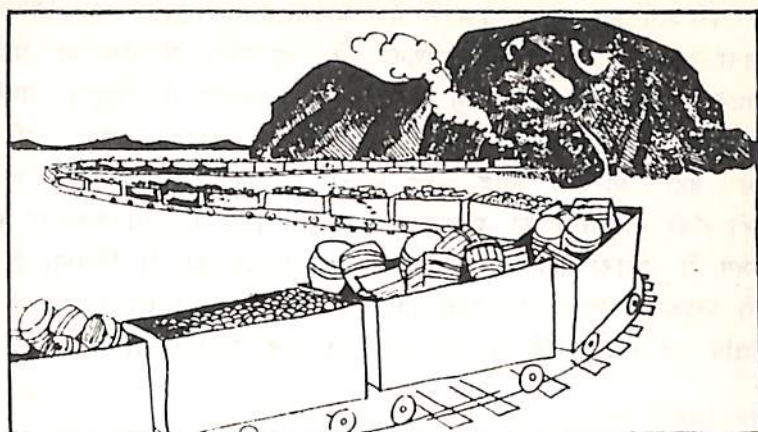
चित्र 60

यह कहा जा चुका है कि दैत्य-संख्यायें मानव-शरीर में भी छिपी हैं। यह हम रक्त के उदाहरण से दिखाते हैं। यदि उसकी एक बूंद सूक्ष्मदर्शक की सहायता से देखें, तो उसमें असंख्य अत्यंत छोटे लाल रंग के कण दिखेंगे। ये ही वे कण हैं, जिनके कारण रक्त लाल दिखता है। इस प्रकार का हर "लाल रक्त-कण" बीच में दबे हुए "गोल तकिये" के आकार का होता है (चित्र 60)। उसका व्यास लगभग 0,007 मि० मी० होता है और उसकी मुटाई – 0,002 मि० मी० होती है। पर उनकी संख्या विराट होती है। एक घन मि० मी० रक्त में उनकी संख्या 50 लाख होती है। पूरे शरीर में उनकी संख्या कितनी है? किलोग्रामों में मनुष्य के वजन से 14 गुना कम लीटर उसका रक्त होता है। यदि आप का वजन 40 कि० ग्रा० है, तो आपके शरीर में लगभग 3 लीटर, अर्थात 3 000 000 घन मि० मी० रक्त है। चूंकि हर घन मि० मी० में लाल रक्त कणों की संख्या 50 लाख है, पूरे शरीर में उनकी संख्या होगी:

$$5\,000\,000 \times 3\,000\,000 = 15\,000\,000\,000\,000.$$

15 खरब रक्त कण! यदि इन नन्हे कणों को एक कतार में रखा जाये, तो उसकी लंबाई 105000 कि० मी० होगी। इतने लंबे धागे से पृथ्वी को भूमध्य-रेखा पर से

$$1\,000\,00 : 40\,000 = 2{,}5 \text{ बार}$$

लपेटा जा सकता है। किसी वयस्क व्यक्ति के शरीर के लाल रक्त-कणों से बने धागे से पृथ्वी 3 बार लपेटी जा सकती है।

चित्र 61. मनुष्य अपने जीवन काल में इतना खाता है।

अब हम समझा देते हैं कि हमारे शरीर के लिये इन कणों के इतने छोटे होने का क्या महत्व है। इनका कार्य है–पूरे शरीर के विभिन्न भागों में अम्लजन (आक्सीजन) फैलाना। जब रक्त फेफड़ों से हो कर निकलता है, लाल रक्त-कण आक्सीजन अपने साथ ले लेते हैं और फिर रक्त के साथ बहते हुए फेफड़े से दूरस्थ तन्तुओं को दे देते हैं। इतना छोटा होने के कारण ही वे इस कार्य को करने में समर्थ हैं। वे जितने छोटे होंगे और जितनी अधिक संख्या में होंगे, उतना ही अधिक उनके वाह्य सतह का कुल क्षेत्रफल होगा और उतना ही अधिक आक्सीजन अपने साथ ढो सकेंगे, क्योंकि अपनी सतह के माध्यम से ही वे आक्सीजन सोखते और निकालते हैं। परिकलन दिखाते हैं कि उनकी सतह का कुल क्षेत्रफल (1200 वर्ग मी०) मानव-शरीर की सतह के क्षेत्रफल से कई हजार गुना अधिक है। ऐसा क्षेत्रफल 40 मीटर लंबी व 30 मीटर चौड़ी जमीन की टुकड़ी का होता है। अब आप समझ सकते हैं कि रक्त कणों का नन्हा होना तथा विराट संख्या में होना शरीर के लिये कितना बड़ा महत्त्व रखता है: इन्हीं दो कारणों से वे हमारे शरीर की कुल सतह से हजार गुनी बड़ी सतह द्वारा आक्सीजन को "कैद" तथा "मुक्त" कर पाते हैं।

70 वर्ष की औसत उम्र में एक आदमी जितने प्रकार का जितना खाना खाता है, इसकी यदि गणना करें, तो प्राप्त परिणाम को सही मायने में दैत्य-संख्या के नाम से पुकारा जा सकता है। मनुष्य अपने जीवन-काल में जितने टन पानी, रोटी, मांस, मछली, अण्डे, घी, दूध, दही, सब्जियां आदि हजम करता है, उन्हें ढोने के लिये एक पूरी लंबी मालगाड़ी की आवश्यकता पड़ेगी। चित्र 61 मानव-शरीर के वजन से हजारों गुनी अधिक की भोजन-सामग्री को ही दिखाता है। इसे देखकर विश्वास नहीं होता कि एक आदमी इतना खा सकता है, यद्यपि यह सच है कि वह इसे एक ही बार में नहीं खाता।

अध्याय 8

बिना स्केल के

69. कदमों में राह नापें. गज या नापने का फीता हमेशा पास नहीं होता, अतः बिना उनकी मदद के ही कम से कम समीपवर्ती नाप लेने के लिये कुछ विधियों की जानकारी होनी चाहिये।

लंबी दूरियों को कदमों में नापना सबसे सरल है। निस्संदेह, वे समान लंबाइयों के नहीं होते : हमारे कदम छोटे-बड़े भी हो सकते हैं। फिर भी साधारण चाल से चलने पर कदमों की लंबाइयां लगभग समान होती हैं। यदि उनकी औसत लंबाई ज्ञात हो, तो बिना किसी त्रुटि के दूरियों को कदमों में नापा जा सकता है।

अपने कदमों की औसत लंबाई जानने के लिये पहले बहुत से कदमों की कुल लंबाई ज्ञात करते हैं और फिर एक कदम की औसत लंबाई का परिकलन करते हैं। इसके लिये नापने के फीते बगैर काम नहीं चलेगा।

समतल भूमि पर फीते की मदद से लगभग 20 मीटर की दूरी नाप लें। जमीन पर फीते का निशान डाल कर फीता हटा लें। अब निशान की रेखा पर साधारण कदमों से चलें। हो सकता है कि इस लंबाई में आपको कदमों की पूर्ण संख्या नहीं मिले। इस स्थिति में यदि आखिरी कदम साधारण कदम के आधे से छोटा हो, तो उसे छोड़ देते हैं, और यदि आधे से बड़ा हो, तो उसे एक के बराबर मान लेते हैं। 20 मीटर की दूरी में कदमों की कुल संख्या से भाग देने पर एक कदम की औसत लंबाई निकल आयेगी। यह लंबाई याद रख लेनी चाहिये, ताकि जरूरत पड़ने पर आप किसी दूरी को नाप सकें।

दूरियाँ नापने के लिये कदमों को गिनते वक्त गिनती से बहके नहीं या गिनती भूल न जायें – इसके लिये निम्न विधि का उपयोग करते हैं। कदमें सिर्फ 10 तक गिनते हैं और बायें हाथ की एक उंगली मोड़ लेते हैं। जब बायें हाथ की सारी उंगलियां मुड़ चुकी होती हैं, अर्थात आप 50 कदम चल चुके होते हैं, दायें हाथ की एक उंगली मोड़ लेते हैं। दायें हाथ की मुड़ी उंगलियाँ बताती हैं कि आप कितनी बार 50 कदम चल चुके हैं। इस तरह 250 तक गिना जा सकता है। इस के बाद फिर से शुरू करते हैं। यह याद रखना पड़ता है कि दायें हाथ की सारी उंगलियां कितनी बार मुड़ चुकी हैं। उदाहरण के लिये, यदि कोई दूरी तय करने में आप दायें हाथ की सारी उंगलियां दो बार मोड़ चुके हैं और अंत में दायें हाथ की तीन उंगलियां तथा बायें हाथ की चार उंगलियां मुड़ी हों, तो उक्त दूरी में कदमों की संख्या होगी :

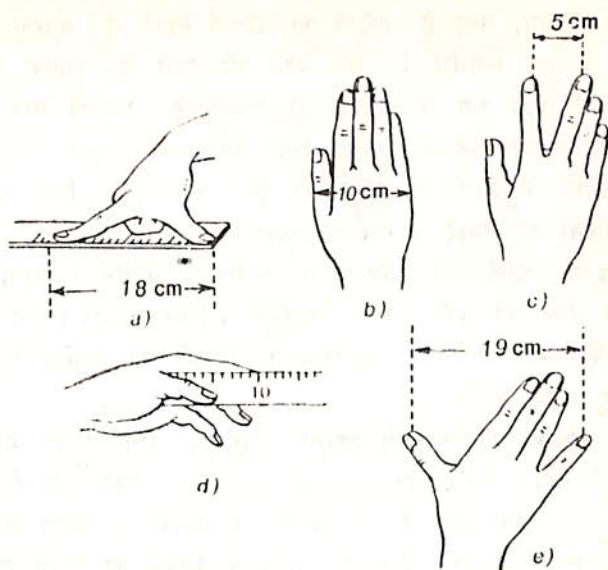
$$2 \times 250 + 3 \times 50 + 4 \times 10 = 690$$

इसमें कुछ वे कदम भी जोड़ देने चाहिये, जो आप बायें हाथ की चौथी उंगली मोड़ने के बाद चले हैं।

इस सिलसिले में आपको एक पुराने नियम की याद दिला दूं : वयस्क आदमी के औसत कदम की लंबाई तलुवों से आँखों तक की लम्बाई की आधी होती है।

चलने की गति से संबंधित एक दूसरा प्राचीन व्यावहारिक नियम है : आदमी एक घंटे में कुल उतने किलोमीटर चलता है, जितने कदम वह तीन सेकेंड में तय करता है। सरलतापूर्वक दिखाया जा सकता है कि यह नियम सिर्फ विशेष कदमों के लिये ही सही है। माना कि कदम की लंबाई x मी० है और तीन सेकेंड में कदमों की संख्या ठीक n है। तब पैदल-यात्री 3 सेकेंडों में nx मी० दूरी तय करता है। इस प्रकार एक घंटे (3600 सेकेंड) में वह $1200nx$ मी० या $1{,}2nx$ कि० मी० की दूरी तय करता है। यह दूरी 3 सेकेंड में चले गये कदमों की संख्या के बराबर हो, इसके लिये आवश्यक है कि निम्न समीकरण सही हो :

$$1.2nx = n \text{ या } 1.2x = 1$$

जहाँ से $x = 0.83$ मी०।

चित्र 62. पहले ये लंबाइयाँ हाथ पर नाप लें, ताकि फिर नापने के फीते बिना काम चला सकें।

यदि इसके पहले का नियम (कि कदम की लंबाई आदमी की लंबाई पर निर्भर करती है!) हमेशा सही है, तो दूसरा नियम सिर्फ साधारण कद के (लगभग 175 से० मी० ऊँचे) लोगों के लिये ही सही है।

70. सजीव मान-दंड. मध्यम आकार की वस्तुओं की लंबाई बिना किसी उपकरण के निम्न प्रकार से नापते हैं। कोई रस्सी या छड़ी एक कंधे से दूसरे फैले हुए हाथ की उंगलियों तक तान लेते हैं। वयस्क आदमी के लिये यह लंबाई लगभग 1 मीटर की होती है। एक मीटर की लंबाई मापने का एक और तरीका यह है कि सरल रेखा पर छः बित्ते, अर्थात अधिकतम फैलाव पर स्थित अंगूठे और तर्जनी के बीच की दूरी की छः गुनी लंबाई, नाप लें। यह लगभग एक मीटर होगी।

आखिरी विधि "खाली हाथ" नापने की कला बताती है। इसके लिये हाथ संबंधी कुछ लंबाइयां पहले से नाप कर याद कर लेते हैं।

क्या-क्या नापें लेनी पड़ती हैं? सबसे पहले तो, जैसा कि चित्र

62,b में दिखाया गया है, हथेली की चौड़ाई नापते हैं। वयस्क आदमी के हाथ में यह लगभग 10 से० मी० की होती है। आपके हाथ में यह लम्बाई कुछ कम या ज्यादा हो सकती है। आपको याद रखना होगा कि कितना फर्क है। इसके बाद, अधिकतम फैलाव पर तर्जनी और मध्यमा के सिरों के बीच की दूरी नापते हैं (चित्र 62,*c*)। अपनी तर्जनी की लंबाई जानना भी लाभदायक होता है (चित्र 62,*d*)। और अंत में, अंगूठे और कनिष्ठा को अधिकतम फैलाने से प्राप्त उनके सिरों के बीच की दूरी जाननी चाहिये (चित्र 62,*e*)। इन सजीव पैमानों की मदद से आप छोटी-मोटी वस्तुओं की समीपवर्ती मापें ज्ञात कर सकते हैं।

71. सिक्कों की मदद से नापना. आधुनिक धातुई सिक्के भी चीजों की लंबाई नापने में सहायक सिद्ध हो सकते हैं। बहुत कम ही लोगों को ज्ञात होगा कि तांबे के एक कोपेक के सिक्के का व्यास सही-सही $1^1/_2$ से० मी० का होता है। और पाँच के सिक्के का व्यास होता है $2^1/_2$ से० मी०। यदि इन दोनों को पास-पास रखा जाये, तो 4 से० मी० (चित्र 63) की दूरी नापी जा सकती है। अतः यदि आपके पास कुछ सिक्के हैं, तो आप निम्न लंबाइयों की बिल्कुल सही नाप ले सकते हैं :

कोपेक	$1\frac{1}{2}$	से०	मी०
5-कोपेकी सिक्का	$2\frac{1}{2}$	»	»
दो 1-कोपेकी सिक्के	3	»	»
5-कोपेकी और 1-कोपेकी	4	»	»
दो 5-कोपेकी	5	»	»

आदि।

5-कोपेकी की चौड़ाई में से 1-कोपेकी की चौड़ाई घटा लेने पर ठीक 1 से० मी० की लंबाई बचेगी।

यदि आपके पास 5-कोपेकी या 1-कोपेकी न हों, तो 2-कोपेकी और 3-कोपेकी से भी काम चल सकता है, यदि आप ठीक-ठीक याद कर लें कि इन दोनों सिक्कों की चौड़ाइयां मिल कर 4 से० मी० के तुल्य होती हैं (चित्र 64)। इस प्रकार आप 4 से० मी० लंबा कागज

चित्र 63. कोपेक और पाँच कोपेकी को सटा कर रखने से 4 से. मी. की लम्बाई नाप सकते हैं।

का टुकड़ा प्राप्त कर सकते हैं और फिर यदि उसे बीच से मोड़ कर एक बार फिर से मोड़ दें, तो एक-एक सेंटीमीटर से चिह्नित चार से॰ मी॰ का माप-दंड मिल जायेगा।

आप देखते हैं कि खोजने और थोड़ी माथा-पच्ची करने पर आप स्केल के बिना भी लंबाइयों की काम-चलाऊ माप ज्ञात कर सकते हैं।

चित्र 64. तीन कोपेकी और दो कोपेकी की चौड़ाइयाँ मिल कर 4 से. मी. के बराबर होती है।

इन जानकारियों में यह भी जोड़ लेना लाभदायक होगा कि तांबे के सिक्कों का वजन तौलने की इकाइयों के रूप में भी इस्तेमाल किया जा सकता है। तांबे के नये सिक्के, जो घिसे-पिटे नहीं हैं, उतने ही ग्राम भारी होते हैं, जितने उनमें कोपेक होते हैं – 1-कोपेकी में 1 ग्राम, दो-कोपेकी में 2 ग्राम, ग्रादि। घिसे सिक्के इन मानकों से वहुत कम ही भिन्न होते हैं। चूंकि किसी छोटी-मोटी चीज का वजन लेते वक्त ग्रक्सर 1 — 10 ग्राम तक के बाट उपलब्ध नहीं होते, तो ये जानकारियां काफी सहायक सिद्ध हो सकती हैं।

अध्याय 9

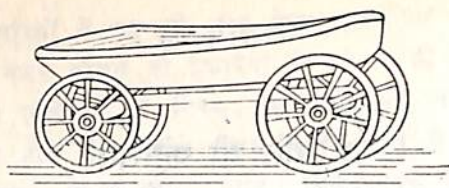
ज्यामिति की पहेलियाँ

इस अध्याय में एकत्रित पहेलियों के हल के लिये ज्यामिति की पूर्ण जानकारी आवश्यक नहीं है। इनका हल वे भी कर सकते हैं, जिन्हें सिर्फ़ आरम्भिक ज्यामिति का साधारण भर ज्ञान है। यहाँ दी गयीं दो दर्जन पहेलियाँ पाठक को यह दिखाने में सहायक होंगी कि वह रेखागणित के उस ज्ञान को कहाँ तक आत्मसात कर पाया है, जिसे जानने का वह दावा करता है। ज्यामिति के वास्तविक ज्ञान का अर्थ सिर्फ ज्यामितिक आकृतियों के गुण-धर्म को गिनाना नहीं होता, बल्कि वास्तविक व व्यावहारिक समस्याओं को हल करना भी होता है। हाथ में बंदूक रखने से क्या फायदा है, यदि आप उसे चलाना नहीं जानते।

पाठक खुद निर्धारित करे कि वह ज्यामिति रूपी लक्ष्य पर इन 24 गोलयों में से कितने सही निशाने लगा पाता है।

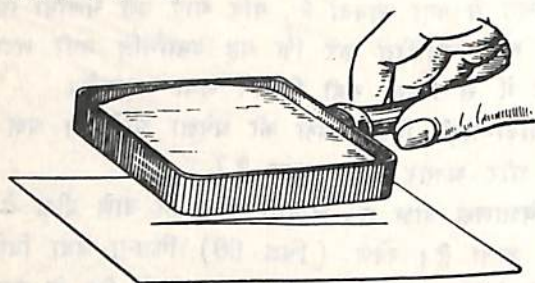
72. घोड़ा-गाड़ी. पिछले अक्ष की अपेक्षा आगे का अक्ष क्यों जल्द घिसता है और अक्सर जल उठता है?

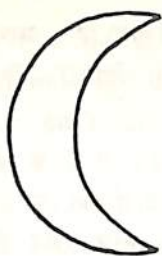
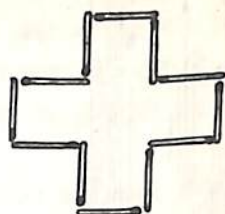
73. विशालक वीक्ष में. चौगुना वर्धन देने वाले वीक्ष से $1^1/_2^\circ$ का कोण देखा जाता है। कोण (चित्र 66) कितना बड़ा दिखेगा?

74. स्पिर्ट-लेवेल. मिस्त्रियों के हाथ आपने गैस के बुलबुले वाला स्पिर्ट-लेवेल देखा होगा। जब स्पिर्ट-लेवेल अक्षैतिज तल पर रखा जाता है, तब यह बुलबुला निशान से ऊपर खिसक आता है। बुलबुले की गति का कारण यह है कि वह द्रव से हल्का होता है, अतः सदा ऊपर उठने को प्रवृत्त रहता है। यदि लेवेल की नली सीधी होती, तो तल का नगण्य झुकाव भी बुलबुले को नली में दूर दूसरे सिरे पर भेज

चित्र 65. पिछली धूरी की अपेक्षा अगली धूरी जल्द क्यों घिसती है।

देता। ऐसे स्पिर्ट-लेवेल को व्यवहार में लाना काफ़ी असुविधाजनक है। अतः नली को चित्र-67 की भाँति एक हल्का मोड़ दे दिया जाता है। पूर्ण क्षैतिज अवस्था में बुलबुला नली के ऊच्चतम बिंदु पर होता है; जो नली के मध्य होती है। यदि तल झुका हुआ है, तो बुलबुला मध्य के पास की किसी बिंदु पर चला आता है।

प्रश्न है: यदि तल का झुकाव आधी डिग्री हो, तो निर्धारित करें कि बुलबुला मध्य-बिंदु के निशान से कितना दूर खिसकेगा? नली की वक्रता की त्रिज्या 1 मीटर है।

75. फलकों की संख्या. यह प्रश्न बेशक बहुतों को बहुत टेढ़ा लगेगा या, इसके विपरीत, बहुतों को बेवकुफाना लगेगा: षट-फलकीय पेंसिल में कितने फलक होंगे?

चित्र 66. कितना बड़ा कोण दिखेगा?

चित्र 67. स्पिर्ट लेवेल।

चित्र 68. चन्द्र-हसिया।

चित्र 69. तीलियों की सलीब।

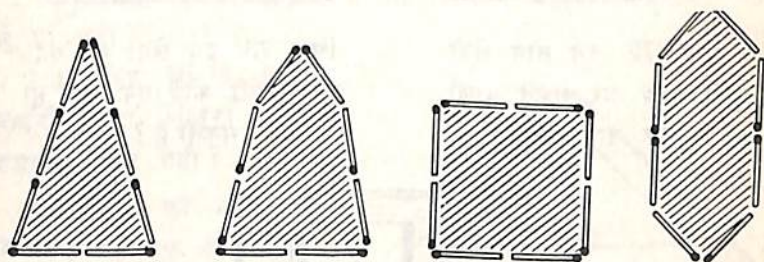
उत्तर देखने से पहले ध्यानपूर्वक सोच लें।

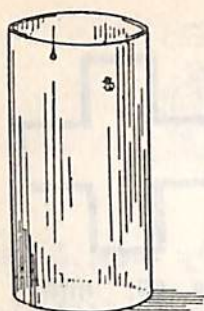
76. अर्द्धचंद्र. चित्र-68 में दिखाये गये अर्द्ध-चंद्र को 6 भागों में बाटना है। इसके लिये आप सिर्फ दो सरल रेखायें खींच सकते हैं। कैसे करेंगे?

77. 12 तीलियों से. 12 तीलियों से एक क्रौस का चिह्न (चित्र 69) बन सकता है, जिसका कुल क्षेत्रफल 5 'वर्ग-तीली' के बराबर है।

तीलियों के स्थान बदल कर ऐसी आकृति बनायें, जिसका क्षेत्रफल सिर्फ 4 'वर्ग-तीली' हो।

इसके लिये नापने के यंत्रों का प्रयोग निषेध है।

78. 8 तीलियों से. 8 तीलियों से अनेक प्रकार की बंद आकृतियाँ बनायी जा सकती हैं। इनमें से कुछ चित्र 70 में दिखायी गयी हैं।

चित्र 70. तीलियों से अधिकतम क्षेत्रफल वाली आकृति कैसे प्राप्त कर सकते हैं?

चित्र 71. मक्खी को शहद की बूंद तक पहुँचने के लिये सबसे छोटा रास्ता बतायें।

उनके क्षेत्रफल बेशक भिन्न हैं। प्रश्न : 8 तीलियों द्वारा अधिकतम क्षेत्रफल की कोई आकृति बनायें।

79. मक्खी का पथ. शीशे के बेलनाकार बरतन की भीतरी दीवार पर उपरी किनारी से 3 से० मी० नीचे शहद की एक बूंद दिख रही है। बरतन की बाहरी दीवार पर शहद के ठीक सामने की बिंदु पर एक मक्खी बैठती है (चित्र 71)

मक्खी के लिये सब से छोटा पथ बतायें, जिसपर मक्खी शहद तक पहुँचे सके।

बरतन की ऊँचाई 20 से० मी० तथा व्यास 10 से० मी० है।

यह मत उम्मीद कीजिये कि मक्खी न्यूनतम पथ खुद ढूढ़ लेगी और आपकी समस्या सरल कर देगी: इसके लिये उसे रेखागणित का ज्ञान होता चाहिये, जो मक्खी के सर के लिये काफी बड़ा है।

80. डाट की खोज. आपके सामने एक तख्त (चित्र-72) है,

चित्र 72. इन तीन छेदों को बंद कर सकने वाली एक डाट बनायें।

चित्र 73. इन छेदों को बंद करने वाली कोई एक डाट हो सकती है?

चित्र 74. इन तीन छेदों को बंद करने वाली एक डाट बन सकती है?

जिसमें तीन छेद हैं: वर्गाकार, तिकोण और गोल। क्या ऐसी कोई डाट हो सकती है, जो इन तीनों ही प्रकार के छेदों को बंद कर सके।

81. **दूसरी डाट**. यदि आप पिछला प्रश्न हल कर चुके हैं, तो होसकता है कि आपको चित्र-73 में दिखाये तख्त के छेदों को बंद करने के लिये भी एक डाट मिल जाये।

82. **तीसरी डाट**. अंत में एक और इसी प्रकार का प्रश्न: चित्र-74 में दिखाये तख्त के छेदों के लिये क्या कोई एक डाट है?

83. 5 **कोपेक पार करना**. एक 5 कोपेक का और एक 2 कोपेक का सिक्का लें। एक कागज पर ठीक दो कोपेकी सिक्के के बराबर छेद बना लें।

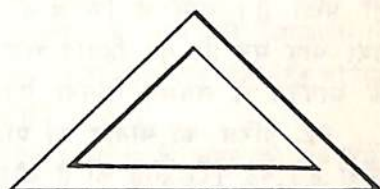
क्या खयाल है आपका, पाँच का सिक्का इस छेद से होकर निकल आयेगा!

इसमें कोई चाल नहीं है: हल का संबंध सचमुच रेखगणित के साथ है।

84. **मीनार की ऊंचाई**. आपके शहर में एक दर्शनीय मीनार है, जिसकी ऊँचाई आप नहीं जानते। पोस्टकार्ड पर छपा मीनार का एक फोटो आपके हाथ में है। यह फोटो मिनार की ऊँचाई निर्धारित करने में कैसे मदद कर सकता है?

85. **समरूप आकृतियां**. यह प्रश्न उनके लिये है, जो जानते हैं कि ज्यामितीय आकृतियों की समरूपता का क्या अर्थ होता है। दो निम्न प्रश्नों का उत्तर देना है:

1) चित्र 75 के त्रिकोण में भीतरी और बाहरी त्रिभुज समरूप हैं या नहीं?

2) चित्र 76 के फ्रेम में बाहरी तथा भीतरी आयत समरूप हैं या नहीं?

86. **तार की छाया**. धूप के दिन टेलीग्राफ के 4 मि० मी० मोटे तार की पूर्ण छाया व्योम में कितनी दूर तक फैलेगी?

87. **इंट**. इमारती इंट का

चित्र 75. वाह्य और अंतः त्रिभुज समानुपाती हैं या नहीं?

चित्र 76. बाहरी और भीतरी आयत समानुपाती हैं या नहीं?

वजन 4 कि० ग्रा० है। उसी सामग्री से घरौंदे के लिये बनी ईंट का वजन क्या होगा, यदि उसकी सभी लंबाइयाँ चार गुना कम हैं?

88. **दैत्य और बौना**. एक मीटर कद के बौने से दो मीटर कद का "दैत्य" लगभग कितना गुना भारी होगा?

89. **दो तरबूज**. कलखोज बाजार में भिन्न आकारों के दो तरबूज बिक रहे हैं। एक तरबूज दूसरे से चौथाई गुना अधिक चौड़ा है और $1^1/_2$ गुना अधिक महंगा है। किसे खरीदना अधिक लाभकर होगा?

90. **दो खरबूजे**. एक किस्म के दो खरबूजे बिक रहे हैं। एक की गोलाई (परिधि) 60 से० मी० है और दूसरे की – 50 से० मी०। पहला दूसरे से डेढ़ गुना महंगा है। किसे खरीदने में अधिक फायदा होगा।

91. **बेर**. बेर में बीज के चारों ओर गूदे की परत बीज जितनी ही मोटी है। मान लें कि बीज और बेर, दोनों ही गोलाकार हैं। क्या आप मन ही मन हिसाब लगा सकते हैं कि गूदे का आयतन बीज के आयतन से लगभग कितना गुना बड़ा होगा?

92. **पेरिस की मीनार का प्रतिमान**. पेरिस की मीनार 300 मीटर ऊँची है। वह पूरी लोहे की है और उसे बनाने में 8 000 000 कि० ग्रा० लोहा खर्च हुआ था। मैं इस विख्यात मीनार का एक बिल्कुल सही लौह प्रतिमान बनवाना चाहता हूँ, जिसका वजन 1 कि० ग्रा० होगा। उसकी ऊँचाई कितनी होगी? ग्लास से कम या अधिक?

93. दो पतीले. समान आकृति के दो पतीले हैं। दोनों की दीवारों की मुटाई एक है। एक में दूसरे से आठ गुनी अधिक जगह है।

कितना गुना अधिक भारी है वह?

94. ठंड में. एक आदमी और एक बच्चा एक ही तरह से पहने-ओढ़े ठंड में खड़े हैं।

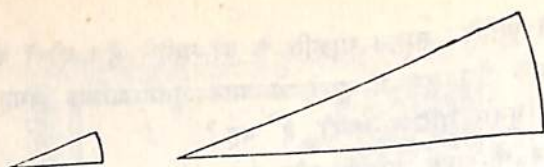
किसे अधिक ठंड लग रही है?

72—94 पहेलियों के उत्तर

72. पहली झलक में प्रश्न ज्यामिति से संबंधित नहीं लगता। लेकिन इस विज्ञान की जानकारी तभी सही कही जा सकती है, जब आपको प्रश्न में इधर-उधर के विवरणों से छिपे रेखागणितीय आधार को ढूढ़ना आता हो। हमारा प्रश्न निस्संदेह रेखागणित का है; रेखागणित की जानकारी बगैर उसे हल नहीं किया जा सकता।

अब देखें कि घोड़ेगाड़ी की अगली धूरी पिछली धूरी की अपेक्षा जल्द क्यों घिसती है। सर्वविदित है कि अगले चक्के पिछले से छोटे होते हैं। एक ही दूरी तय करने में छोटा चक्का बड़े की अपेक्षा अधिक बार घूमता है। छोटे चक्के की परिधि कम होती है और इसीलिये दी गयी दूरी में अधिक बार अँटती है। इससे स्पष्ट है कि हर सफर में अगले चक्के पिछलों की अपेक्षा अधिक बार घूमते हैं और इससे धूरी बेशक जल्द घिसती है।

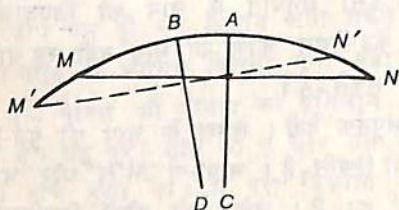
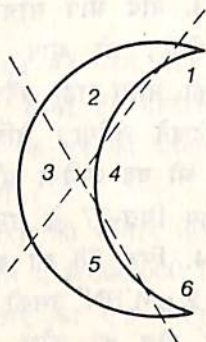
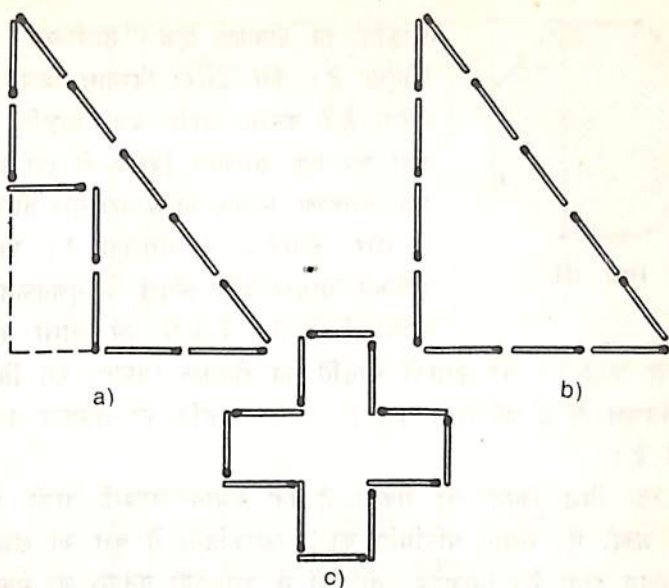
73. यदि आप सोचते हैं कि वीक्ष में हमारा कोण $1^1/_2 \times 4 = 6^\circ$ का दिखेगा, तो आप गलती कर चुके हैं। विशालक से देखने पर कोण की मात्रा नहीं बढ़ती। यह सही है कि कोण बनाने वाला चाप बड़ा दिखने लगेगा। लेकिन इसी अनुपात में चाप की त्रिज्याओं की लंबाई भी बढ़ जायेगी और केंद्र-स्थित कोण का मान वही रह जायेगा। यह आप चित्र-77 से समझ सकते हैं।

74. चित्र 78 को ध्यानपूर्वक देखें। लेवेल के चाप की पूर्व-स्थिति MAN है। M′BN′ उसकी नयी स्थिति है। चापकर्ण M′N′ और चापकर्ण MN के बीच का कोण $^1/_2{}^\circ$ का है। लेवेल की दोनों स्थितियाँ इस प्रकार चुनी गयी हैं कि बुलबुला पहले की भाँति अब भी A बिंदु पर

चित्र 77

है, पर चाप MN का मध्य A से B पर खिसक आया है। चाप AB की लंबाई ज्ञात करनी है, जब कि उसकी त्रिज्या 1 मीटर है और केंद्र पर उसके द्वारा स्थापित कोण $^1/_2°$ का है (यह परस्पर लम्ब भुजाओं वाले न्यून कोणों की तुल्यता से ज्ञात होता है)।

परिकलन जटिल नहीं है। 1 मीटर (1000 मि० मी०) त्रिज्या वाले वृत्त की पूरी परिधि $2 \times 3{,}14 \times 1000 = 6280$ मि० मी० लम्बी होगी। परिधि केंद्र पर 360° या 720 अर्द्ध-डिग्रियाँ बनाती है, अतः एक अर्द्ध-डिग्री का कोण $6280 : 720 = 8.7$ मि० मी० लंबा चाप बनायेगा।

बुलबुला अपने चिह्न से लगभग 9 मि० मी० या करीब एक सेंटी-मीटर खिसक आयेगा। आसानी से देखा जा सकता है कि नली की वक्रता की त्रिज्या जितनी बड़ी होगी, लेवेल उतना ही संवेदनशील होगा।

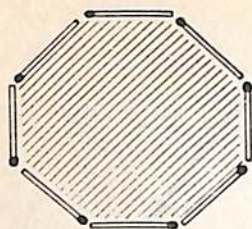
75. प्रश्न मजाक के लिये नहीं दिया गया है; इसमें साधारण शब्द-प्रयोग की गलती छिपी है। "षटफलकीय" पेंसिल के, जैसा कि

चित्र 78 चित्र 79

चित्र 80

अधिकांश लोग सोचते होंगे, 6 फलक नहीं होते। यदि वह छिली नहीं है, तो उसके 8 फलक होंगे: 6 पार्श्वीय और 2 किनारों के। यदि सचमुच में उसके छः फलक होते तो उसका आकार चतुर्भुजी काट वाले छड़ की भाँति होता।

प्रिज्म में सिर्फ पार्श्वीय फलकों की गणना करने की गलती काफी प्रचलित है। बहुधा लोग त्रिफलकीय प्रिज्म, चतुर्फलकीय प्रिज्म आदि शब्दों का प्रयोग करते हैं। इनको प्रिज्म के आधार के आकारानुसार तिकोण, चतुर्भुजी आदि कहना अधिक उपयुक्त होगा। त्रिफलकीय प्रिज्म, अर्थात तीन फलकों वाला प्रिज्म, होता भी नहीं है।

इसीलिये पेंसिल को, जिसका उल्लेख प्रश्न में किया गया है, षटफलकीय की बजाय षटकोण कहना चाहिये।

76. कैसे करना चाहिये – यह चित्र 79 में दिखाया गया है। सुविधा के लिये प्राप्त सभी 6 भाग अंकों द्वारा निर्दिष्ट हैं।

77. तीलियों को चित्र 80, *a* की भाँति रखना चाहिये। इस

चित्र 81

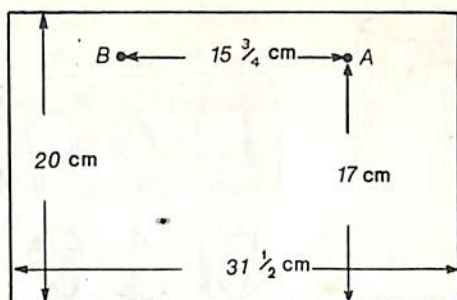
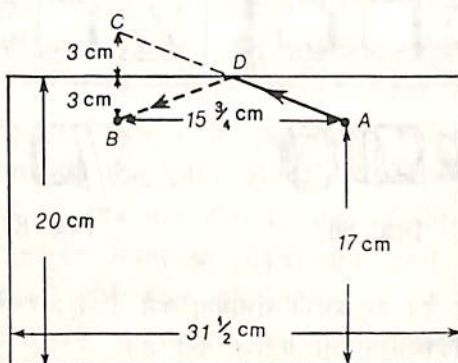
आकृति का क्षेत्रफल एक "तीली-वर्ग" का चौगुना है। कैसे इसका विश्वास किया जा सकता है? कल्पना द्वारा इस आकृति को बढ़ा कर एक समकोण त्रिभुज में पूरा करें। इस समकोण त्रिभुज का आधार तीन तीलियाँ हैं और ऊँचाई – 4 तीलियाँ *। इसका क्षेत्रफल आधार और ऊँचाई के गुणनफल का आधा $^1/_2 \times 3 \times 4 = 6$ वर्ग तीली होगा (चित्र 80,*b*)। पर हमारी आकृति का क्षेत्रफल स्पष्टतः इस त्रिभुज के क्षेत्रफल से 2 वर्ग-तीली कम है। अतः आकृति का क्षेत्रफल 4 वर्ग-तीली है।

78. सिद्ध किया जा सकता है कि समान लम्बाई वाली (या दूसरे शब्दों में, समान परिमिति की) रेखाकृतियों में वृत्त का क्षेत्रफल अधिकतम होता है। निस्संदेह, तीलियों से वृत्त नहीं बनाया जा सकता, पर 8 तीलियों से एक आकृति बनायी जा सकती है (चित्र 81), जो वृत्त के अधिकतम निकट हो। यह समबाहु अष्टकोण है। एकमात्र यही आकृति हमारे प्रश्न की शर्त्तों को पूरी करती है: इसका क्षेत्रफल अधिकतम है।

79. प्रश्न हल करने के लिये बेलनाकार बरतन के पार्श्वीय सतह को फैला कर एक समतल आयत का रूप दे दें (चित्र 82)। इसकी ऊँचाई 20 से० मी० होगी और आधार बरतन की परिधि, अर्थात $10 \times 3^1/_7 = 31^1/_2$ से० मी० (लगभग) के बराबर होगा। इस आयत पर शहद और मक्खी का स्थान निर्धारित करें। मक्खी बिंदु A पर आधार से 17 से० मी० की ऊँचाई पर है। बूंद उसी ऊँचाई की बिंदु B पर है, जो A से अर्द्ध-परिधि, अर्थात $15^3/_4$ से० मी० की दूरी पर है।

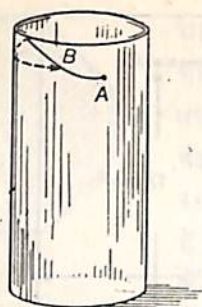
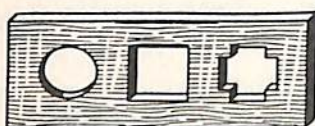
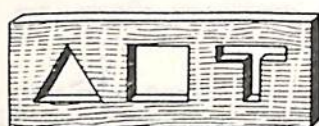
बिंदु, जिस पर मक्खी बरतन की दीवार रेंगती हुई पार करेगी, उसे ढूढ़ने के लिये निम्न बनावट पूरा करें: बिंदु B से (चित्र 83)

---

* "पिथागोरस साध्य" से परिचित पाठक समझ गये होंगे कि हम विश्वासपूर्वक क्यों कह सकते हैं कि त्रिभुज समकोण ही होगा: $3^2 + 4^2 = 5^2$

चित्र 82

चित्र 83

आयत की ऊपरी भुजा पर एक लंब डालें और उसे अपनी लंबाई जितना ही (बिंदु C तक) और बढ़ा दें। C और A बिंदुओं को मिला दें। D वह बिंदु होगी, जिसपर मक्खी रेंगती हुई बरतन के दीवार की दूसरी तरफ जायेगी। पथ ADB न्यूनतम होगा।

बिछे आयत पर न्यूनतम पथ ढूढ़ने के बाद उसे पुनः बेलनाकार मोड़ कर हम देख सकते हैं कि शहद की बूंद तक शीघ्र पहुँचने के लिये मक्खी किस पथ का अनुगमन करेगी (चित्र 84)

इस प्रकार की स्थितियों में मक्खियाँ ऐसा पथ चुनती हैं या नहीं, कहना मुश्किल है। हो सकता है कि गंध से प्रेरित वह सचमुच न्यूनतम

चित्र 84 चित्र 85

चित्र 86 चित्र 87

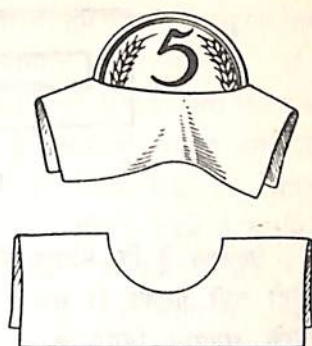
पथ पर चलती है। पर इसकी संभावना कम ही है: इसके लिये घ्राण-शक्ति की संवेदनशीलता ही पर्याप्त नहीं है।

80. ऐसा एक डाट बनाना सचमुच ही संभव है। उसका आकार चित्र 85 में दिखाया गया है। आप आसानी से देख सकते हैं कि इस एक ही डाट से आप तिकोन वर्गाकार और गोल तीनों प्रकार के छेद बंद कर सकते हैं।

81. चित्र 86 में दर्शित छेदों (गोल वर्गाकार और क्रौस-आकार) को बंद करने के लिये भी एक डाट संभव है। इसे चित्र 86 में तीन पार्श्वों से दिखाया गया है।

82. ऐसा भी एक डाट संभव है। चित्र 87 में आप इसे तीन भिन्न स्थितियों से देख सकते हैं।

(ऐसी समस्याओं से अक्सर प्रारूपकारों को वास्ता पड़ता है जब उन्हें मशीन के किसी भाग के किन्हीं तीन प्रक्षेपणों के आधार पर उसका आकार निर्धारित करना पड़ता है।)

83. बात कितनी भी विचित्र क्यों न लगे पाँच-कोपेकी को दो-कोपेकी के तुल्य छेद से निकालना पूर्ण रूप से संभव है। इसके लिये सिर्फ काम हाथ में लेना पड़ेगा। कागज को इस प्रकार मोड़ते हैं कि गोल छेद लमड़ कर एक सीधीं दरार में परिवर्तित हो जाये (चित्र 88) : इस दरार से आप पाँच-कोपेकी सिक्का पार करा सकते हैं।

चित्र 88

रेखागणितीय परिकलन इस हाथ की सफाई को समझा सकता है। दो-कोपेकी सिक्के का व्यास 18 मि० मी० होता है। उसकी परिधि आसानी से ज्ञात कर सकते हैं: वह 56 मि० मी० से कुछ अधिक होगी। अतः सीधी दरार की लंबाई 28 मि० मी० होगी। चूंकी पाँच-कोपेकी सिक्के का व्यास सिर्फ 25 मि० मी० होता है वह 28 मि० मी० लंबी दरार से सरलतापूर्वक निकल आ सकता है। इसमें उसकी मुटाई ($1^1/_2$ मि० मी०) कोई बाधा नहीं डालेगी।

84. फोटोग्राफ के आधार पर मीनार की वास्तविक ऊँचाई ज्ञात करने के लिये पहले फोटो पर मीनार के आधार और उसकी ऊँचाई को सही-सही नाप लेना चाहिये। माना कि फोटो पर मीनार की ऊँचाई 95 मि० मी० तथा आधार 19 मि० मी० है। फिर आप वास्तविक मीनार के आधार की लंबाई नापते हैं। माना कि वह 14 मी० है।

अब आप निम्न विचारक्रम का अनुसरण करते हैं।

मीनार का फोटो और उसकी वास्तविक परि-आकृति रेखागणित की दृष्टि से समरूप हैं। अतः फोटो में मीनार की ऊँचाई उसके आधार से जितनी गुनी अधिक होगी, वास्तविक मीनार की ऊँचाई उसके आधार से उतनी ही गुनी अधिक होगी। प्रथम अनुपात $95 : 19 = 5$ है। इससे निष्कर्ष निकलता है कि मीनार की वास्तविक ऊँचाई उसके आधार से 5 गुनी अधिक है: $14 \times 5 = 70$ मी०।

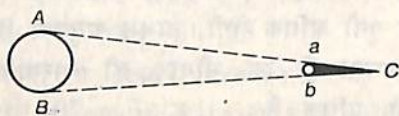
मीनार की ऊँचाई 70 मीटर है।

चित्र 89

उल्लेख्य है कि मीनार की ऊँचाई ज्ञात करने के लिये हर तरह का फोटो नहीं प्रयुक्त हो सकता। इसके लिये ऐसा फोटो चाहिये, जिसमें उसके अनुपात बिगड़े न हों, जैसा कि अक्सर नौसिखुए फोटोग्राफरों द्वारा खींचे गये फोटो में होता है।

85. लोग अक्सर दोनों ही प्रश्नों के लिये सकारात्मक उत्तर देते हैं। पर वास्तव में सिर्फ त्रिभुज समरूप हैं। फ्रेम की आकृति में बाहरी और भीतरी आयत समरूप नहीं हैं। त्रिभुजों की समरूपता के लिये उनके कोणों का बराबर होना पर्याप्त है। चूंकि दिये गये त्रिकोण की वाह्य भुजायें आंतरिक भुजाओं के समानांतर हैं, दोनों ही – वाह्य तथा आंतरिक – आकृतियाँ समरूप हैं। अन्य बहुभुजों की समरूपता के लिये उनके कोणों का बराबर होना (या दूसरे शब्दों में, उनकी भुजाओं का समानांतर होना) पर्याप्त नहीं है। इसके लिये बहुभुजों की **भुजाओं का समानुपाती** होना भी आवश्यक है। फ्रेम जैसी आकृति के भीतरी और बाहरी चतुर्भुज तभी समरूप हो सकते हैं, जब वे वर्ग (या कोई भी समबाहु चतुर्भुज) हों। सभी अन्य स्थितियों में वाह्य चतुर्भुज की भुजायें आंतरिक चतुर्भुज की भुजाओं के समानुपाती नहीं होंगी और इसीलिये ये दोनों आकृतियाँ समरूप नहीं होंगी। समरूपता की अनुपस्थिति चित्र 89 जैसी चौड़े फ्रेम वाली आकृति में स्पष्ट दिखती है। बायें फ्रेम में वाह्य भुजाओं का अनुपात 2 : 1 और आंतरिक भुजाओं का अनुपात 4 : 1 है। दायें फ्रेम में ये अनुपात क्रमश: 4 : 3 और 2 : 1 हैं।

86. बहुतों को आश्चर्य होगा कि इस प्रश्न के हल के लिये खगोल-

चित्र 90

शास्त्र की भी जरूरत पड़ सकती है, क्योंकि हमें पृथ्वी से सूरज तक की दूरी और सूरज का व्यास जानना होगा।

तार द्वारा व्योम में प्रक्षिप्त पूर्ण छाया की लंबाई चित्र 90 की रेखागणितीय बनावट द्वारा निर्धारित होती है। आसानी से देख सकते हैं कि छाया तार के अनुप्रस्थ से उतनी ही गुनी अधिक लंबी है, जितनी पृथ्वी से सूरज की दूरी (150 000 000 कि० मी०) सूरज के अनुप्रस्थ (1 400 000 कि० मी०) से बड़ी है। आखिरी अनुपात लगभग 115 के बराबर है। अतः तार द्वारा व्योम में प्रक्षिप्त पूर्ण छाया की लंबाई होगी

$$4 \times 115 = 460 \text{ मि० मी०} = 46 \text{ से० मी०।}$$

पूर्ण छाया की लंबाई इतनी कम होने के कारण ही हम उसे पृथ्वी या घरों की दीवारों पर नहीं देख पाते। वे धूंधली धारियाँ, जो हमें दृष्टिगोचर होती हैं, छाया नहीं, बल्कि अर्द्धछाया हैं।

ऐसे प्रश्नों के हल की एक अन्य विधि 8-वीं पहेली में बतायी गयी थी।

87. घरौंदे की ईंट का वजन 1 कि० ग्रा० होगा, अर्थात् वह इमारती ईंट से सिर्फ चार गुना कम भारी होगी – ऐसा उत्तर बिल्कुल गलत है। सिर्फ उसकी लंबाई ही चार गुनी कम नहीं है; उसकी चौड़ाई और ऊँचाई भी चार-चार गुनी कम है। उसका आयतन $4 \times 4 \times \times 4 = 64$ गुना कम है। अतः सही उत्तर होगा :

घरौंदे की ईंट का वजन $4\,000 : 64 = 62{,}5$ ग्रा०।

88. इस प्रश्न के हल के लिए आवश्यक ज्ञान आपको प्राप्त हो चुका है। चूंकि मानव-शरीर की आकृतियाँ लगभग समरूप होती हैं, दुगुना कद होने पर आदमी का आयतन दो गुना नहीं, बल्कि 8 गुना अधिक होगा। अतः हमारा "दैत्य" 8 गुना अधिक भारी होगा।

सबसे ऊँचा "दैत्य", जिसके बारे में इतिहास बताता है, एल्जास का निवासी था। उसका कद था 275 से० मी०। यह आदमी की औसत ऊँचाई से एक मीटर अधिक है। सबसे छोटे बौने का कद 40 से० मी० से कुछ कम था, अर्थात् वह उक्त एल्जास निवासी से लगभग 7 गुना कम ऊँचा था। अतः, यदि तराजू के एक पलड़े पर

एल्जासी "दैत्य" को रखा जाये, तो दूसरे पलड़े पर संतुलन के लिये $7 \times 7 \times 7 = 343$ बौनों को खड़ा करना पड़ेगा। यह बौनों की पूरी भीड़ होगी।

89. बड़े तरबूज का आयतन छोटे से

$$1\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{4} = \frac{125}{64},$$

अर्थात् लगभग दुगुना बड़ा होगा। अतः बड़ा तरबूज खरीदना अधिक फायदेमंद होगा: उसकी कीमत सिर्फ डेढ़ गुनी अधिक है और उसमें खाद्यांश दुगुना है।

फिर बेचने वाले ऐसे तरबूजों की कीमत डेढ़ गुनी की बजाय दुगुनी अधिक क्यों नहीं रखते? बात यह है कि बेचने वाले अधिकांशतः रेखागणित का इतना ज्ञान नहीं रखते। वैसे, खरीददार भी उसमें कमजोर ही होते हैं, जब वे ऐसे लाभप्रद सौदे से अक्सर इन्कार करते हैं। बिना किसी डर के कहा जा सकता है कि छोटे तरबूजों की बजाय बड़े तरबूज खरीदना हमेशा फायदेमंद है, क्योंकि उनकी कीमत उनके वास्तविक मूल्य से कम आँकी जाती है। पर अधिकांश खरीददार इसकी कल्पना भी नहीं करते।

इसी कारणवश, छोटे अंडों की अपेक्षा बड़े अंडे खरीदना अधिक लाभकर है, यदि उनकी कीमत वजन के अनुसार नहीं आँकी जाती।

90. वृत्तों की परिधियों का अनुपात उनके व्यासों के अनुपात के बराबर होता है (परिधि और व्यास समानुपाती होते हैं)। यदि एक खरबूजे की परिधि 60 से० मी० है और दूसरे की 50 से० मी०, तो उनके व्यासों का अनुपात $60 : 50 = \frac{6}{5}$ और उनके आयतनों का अनुपात

$$\left(\frac{6}{5}\right)^3 = \frac{216}{125} \approx 1.73 \text{ होगा।}$$

आयतन (या वजन) के अनुसार बड़े खरबूजे की कीमत छोटे से 1.73 गुना, अर्थात 73% अधिक आँकी जानी चाहिये। पर उसके लिये सिर्फ 50% अधिक मांग रहे हैं। लाभ ही लाभ है!

91. प्रश्न की शर्त्त के अनुसार बेर का व्यास बीज के व्यास से

तीन गुना अधिक है। अतः बेर का आयतन बीज के आयतन से $3 \times 3 \times 3 = 27$ गुना अधिक है। बेर में बीज का अंश $\frac{1}{27}$ है और खाद्यांश – बाकी $\frac{26}{27}$। अतः आयतनानुसार खाद्यांश बीज से 26 गुना अधिक है।

92. यदि मान से प्रतिमान 8 000 000 गुना हल्का है और दोनों एक ही धातु के बने हैं, तो प्रतिमान का **आयतन** मान के आयतन से 8 000 000 गुना कम होगा। हमें ज्ञात है कि समरूप पिंडों के आयतन उनकी घन-ऊँचाइयों के समानुपाती होते हैं। अतः प्रतिमान मान से 200 गुना कम ऊंचा होना चाहिये, क्योंकि

$$200 \times 200 \times 200 = 8\,000\,000$$

वास्तविक मीनार की ऊँचाई 300 मी० है। अतः उसके प्रतिमान की ऊँचाई

$300 : 200 = 1^1/_2$ मी० होगी।

प्रतिमान लगभग आदमी के कद के बराबर होगा।

93. रेखागणित की दृष्टि से दोनों ही पतीले समरूप पिंड हैं। यदि बड़े पतीले में 8 गुना अधिक स्थान है, तो उसके सभी रैखिल माप दो गुना अधिक हैं: वह दुगुना ऊँचा तथा सब ओर से दुगुना चौड़ा है। यदि वह दुगुना ऊँचा तथा दुगुना चौड़ा है, तो उसकी सतह का क्षेत्रफल 2×2, अर्थात् चार गुना अधिक होगा, क्योंकि समरूप पिंडों की सतहों के क्षेत्रफल उनके रैखिल मापों के वर्गों के समानुपाती होते हैं। दीवारों की मुटाई समान होने पर उनका भार उनकी सतहों के क्षेत्रफलों पर निर्भर करेगा। अतः प्रश्न का उत्तर है: बड़ा पतीला छोटे से **चौगुना** भारी है।

94. प्रथम दृष्टि में यह प्रश्न गणित से संबंधित नहीं लगता, पर इसका हल सारतः उन्हीं रेखागणितीय तर्कों द्वारा होता है, जिनका प्रयोग हमने पिछले प्रश्न के हल में किया था।

प्रश्न को हल करने के पहले हम इसी प्रकार का एक दूसरा, अधिक सरल प्रश्न देखते हैं।

एक ही धातु से बनी दो केतलियाँ हैं। एक छोटी है और एक बड़ी है। दोनों ही गर्म पानी से भरी हैं। कौन जल्द ठंडी होगी?

चीजें मुख्यत: अपनी सतहों पर से ठंडी होती हैं। अत: पहले वह केतली ठंडी होगी, जिसके इकाई आयतन की सतह अधिक है। यदि एक केतली दूसरी से n गुनी ऊँची तथा n गुनी चौड़ी है, तो उसकी कुल सतह का क्षेत्रफल n^2 गुना अधिक होगा और उसका आयतन n^3 गुना अधिक होगा। बड़ी केतली में इकाई क्षेत्रफल की सतह के लिये छोटी केतली से n गुना अधिक आयतन है। अत: छोटी केतली जल्द ठंडी होगी।

इन्हीं कारणों से हिमपात में खड़े बच्चे को बड़े से अधिक ठंड लगेगी, चाहे उनके कपड़े-लत्ते एक से ही क्यों न हों। उनके शरीरों के हर घन से० मी० में ताप की लगभग एक ही मात्रा उत्पन्न होती है. पर बच्चे के शरीर के प्रति घन से० मी० के लिये ताप खोने वाली सतह आदमी के शरीर से कहीं ज्यादा है।

हाथ-पैर की उंगलियाँ ठंड से जल्द अँकड़ती हैं और बर्फीली हवा में जल्द जम जाती हैं। इसका भी कारण यही है कि शरीर के अन्य भागों की सतहों का क्षेत्रफल उनके आयतनों की तुलना में उतना अधिक नहीं होता।

इसी से संबंधित एक और प्रश्न है:

लकडी के कुंदे की अपेक्षा उससे काट कर बनायी गयी चैलियाँ क्यों जल्द जलती हैं?

चूंकि तपन पिंडों की सतह से शुरू होती है और फिर उसके पूरे आयतन पर फैलती है, वर्गाकार अनुप्रस्थ वाली चैली की सतह व आयतन की तुलना उसी लंबाई वाले (और उसी प्रकार के वर्गाकार अनुप्रस्थ वाले) कुंदे की सतह व आयतन के साथ करनी चाहिये। तभी ज्ञात होगा कि दोनों ही स्थितियों में इकाई घन से० मी० लकड़ी के लिये कितनी सतह है। यदि कुंदा चैली से 10 गुना मोटा है, उसका आयतन 100 गुना अधिक होगा। अत: चैली में इकाई सतह के हिस्से में कुंदे की अपेक्षा 10 गुना कम आयतन आयेगा: ताप की एक ही मात्रा को चैली के लिये 10 गुना कम पदार्थ जलाना पड़ता है और इसीलिये ताप के एक ही स्रोत से कुंदे की अपेक्षा चैली जल्द जलती है। (लकडी के बुरे ताप-संचारक होने के कारण उपरोक्त अनुपातों को समीपवर्ती भर मानना अधिक उपयुक्त होगा: वे प्रक्रियाओं की सामान्य गति की विशेषता निर्दिष्ट करते हैं, उसके परिमाणात्मक पक्ष को नहीं।)

अध्याय 10

बारिश और हिमपात की ज्यामिति

95. वृष्टिमापी. अक्सर कहते हैं कि लेनिनग्राद बहुत ही बारिश का क्षेत्र है, मास्को से कहीं अधिक। पर वैज्ञानिकों का मत कुछ और ही है। वे कहते हैं कि मास्को को वर्षा से अधिक पानी प्राप्त होता है, बनिस्बत कि लेनिनग्राद को। कैसे वे ज्ञात करते हैं? क्या यह नापना संभव है कि वर्षा अपने साथ कितना पानी लाती है?

यह कठिन प्रतीत होता है, पर बारिश का हिसाब-किताब रखना आप भी सीख सकते हैं। यह मत सोचिये कि इसके लिये आपको बारिश का सारा पानी जमा करना पड़ेगा। इसके लिये आपको सिर्फ उस परत की **मुटाई** को नापना पड़ेगा, जो वर्षा के रूप में गिरे पानी से बनती है, यदि यह पानी जमीन द्वारा सोखा न जाये या इधर-उधर बह न जाये। और यह कोई कठिन काम नहीं है। क्योंकि जब वर्षा होती है, उसकी बूंदें सारे क्षेत्र पर समान रूप से पड़ती हैं: ऐसा नहीं होता कि किसी के बाड़े में कम बूंदें पड़ें और दूसरे में अधिक। यदि हम पूरे क्षेत्र के सिर्फ एक छोटे हिस्से में गिरे पानी की परत की मुटाई नाप लें, तो सारे क्षेत्र में गिरे पानी की मुटाई ज्ञात हो जायेगी।

अब शायद आप समझ गये होंगे कि वर्षा के रूप में गिरे पानी की परत की मुटाई नापने के लिये क्या करना चाहिये। इसके लिये कोई ऐसा क्षेत्र बनाना चाहिये, जिसमें वर्षा की बूंदें स्थिर रहें और जमीन में सोखी न जायें। कोई भी खुला बरतन, जैसे बाल्टी, यह काम कर सकता है। यदि आपके पास खड़ी दीवारों वाली बाल्टी हो (ऐसी कि ऊपर से नीचे तक उसकी चौड़ाई समान हो), तो उसे एक खुली

जगह पर रख दीजिये।* जब बारिश खत्म हो जाये, उसमें एकत्रित पानी की ऊँचाई नाप लीजिये–परिकलन के लिये आवश्यक सामग्री आपको पूर्ण रूप से प्राप्त हो जायेगी।

अब इस घरेलू "वृष्टिमापी" को सविस्तार देखें। बाल्टी में पानी के स्तर को किस प्रकार नापा जाये? क्या उसमें लंबाई नापने की स्केल घुसा दें? लेकिन यह तभी सुविधाजनक होगा, जब बाल्टी में पानी काफी हो। यदि पानी की परत, जैसा कि अक्सर होता है, 2—3 से० मी० या सिर्फ मि० मी० मोटी हो, तो इस विधि से उस की मुटाई सही-सही नापना असंभव है। यहाँ एक एक मिलीमीटर, यहाँ तक कि उसका दशांश भी महत्त्व रखता है। फिर क्या किया जाये?

बेहतर होगा कि आप पानी को शीशे के किसी सँकरे बरतन में ढाल दें। ऐसे बरतन में पानी की सतह ऊँची होगी और पारदर्शक दीवार से सुगमतापूर्वक दिख सकेगी। आप समझ रहे होंगे कि सँकरे बरतन में पानी की सतह उस परत की मुटाई नहीं बताती, जिसे हम नापना चाहते हैं। लेकिन एक नाप को दूसरी में परिवर्तित करना आसान है। माना कि सँकरे बरतन के तल का व्यास हमारे "वृष्टि-मापी" के तल से दस गुना कम है। अतः उसके तल का क्षेत्रफल बाल्टी के तल के क्षेत्रफल से 10×10, अर्थात् 100 गुना कम है। स्पष्ट है कि बाल्टी से उसमें ढाले गये पानी का स्तर 100 गुना अधिक ऊँचा होगा। अर्थात्, यदि बाल्टी में पानी की परत 2 मि० मी० मोटी थी, तो सँकरे बरतन में वह 200 मि० मी० या 20 से० मी० मोटी होगी।

इस परिकलन से आप देखते हैं कि शीशे का बरतन बाल्टी से बहुत अधिक संकीर्ण नहीं होना चाहिये, अन्यथा उसे काफी ऊँचा होना पड़ेगा। पर्याप्त रहेगा, यदि आप बाल्टी से सिर्फ 5 गुना सँकरा शीशे का बरतन लेते हैं। इस हालत में उसके तल का क्षेत्रफल 25 गुना कम होगा और उसमें ढाले गये पानी का स्तर उतना ही गुना ऊँचा उठेगा। बाल्टी में एक मि० मी० मोटी पानी की परत शीशे के

---

*बाल्टी को किसी ऊँची जगह पर रखना चाहिये, ताकि वर्षा की बूंदों के जमीन पर टकराने से बने छींटे उसमें न पड़े।

बरतन में 25 मि० मी० मोटी परत बनायेगी। अतः अच्छा होगा, यदि आप शीशे के बरतन पर बाहर से एक कागज की पट्टी चिपका दें और उस पर 25-25 मिलिमीटरों की दूरी पर निशान लगा लें और उन्हें 1,2,3 आदि से क्रमांकित कर दें। तब आप सँकरे बरतन में पानी की ऊँचाई देख कर बिना किसी परिकलन के ज्ञात कर लेंगे कि बाल्टी में उसकी क्या ऊँचाई थी। यदि सँकरे बरतन की चौड़ाई 5 गुनी नहीं, बल्कि चार गुनी कम है, तो निशान हर 16 मि० मी० के अंतराल पर लगाने होंगे।

संकरे मापन-पात्र में बाल्टी की किनारी से पानी ढालना काफी असुविधाजनक है। बाल्टी की दीवार में एक छोटा गोल छेद कर देना और उसे शीशे की डाट से बंद रखना बेहतर रहेगा। इस छेद से पानी ढालना कहीं अधिक सुविधाजनक होगा।

अब आपके पास वर्षा-जल की परत कितनी मोटी है, नापने का उपकरण तैयार है। निस्संदेह, बाल्टी और घरेलू मापन-पात्र वर्षा की उतनी सही माप नहीं बता सकते, जितनी की मौसम-अध्ययन केंद्रों में प्रयुक्त होने वाले वास्तविक वृष्टि-मापी और मापन-पात्र बता सकते हैं। फिर भी, आपके सरलतम सस्ते उपकरण कई अत्यंत ज्ञानवर्धक परिकलन संपन्न करने में सहायक हो सकते हैं।

ये ही परिकलन अभी हम करेंगे।

96. कितना पानी? मान लीजिये कि आपके पास 40 मीटर लंबा और 24 मीटर चौड़ा एक बाड़ा है। पानी बरसा और आप जानना चाहते हैं कि बाड़े में कितना पानी पड़ा। कैसे यह ज्ञात करें?

शुरूआत निस्संदेह वर्षा-जल की परत की मुटाई के निर्धारण से करते हैं: इस आँकड़े के बिना कोई भी परिकलन असंभव है। माना कि आपका वृष्टि-मापी बताता है कि वर्षा से 4 मि० मी० मोटी पानी की परत बनती है। हिसाब करें कि बाड़े के प्रति वर्ग मीटर क्षेत्र पर कितना घन से० मी० पानी होता, यदि जमीन में सोखा नहीं जाता। एक वर्ग मीटर की लंबाई 100 से० मी० तथा चौड़ाई 100 से० मी० होती है। उस पर 4 मि० मी० या 0.4 से० मी० मोटी पानी की परत है। अतः पानी की इस परत का आयतन $100 \times 100 \times 0.4 =$ $= 4000$ **घन से० मी०** होगा।

आप जानते हैं कि 1 घन से० मी० पानी का वजन 1 ग्राम होता है। अतः बाड़े के हर वर्ग मीटर क्षेत्र पर 4000 ग्राम, अर्थात 4 कि० ग्रा० पानी पड़ा है। बाड़े में कुल $40 \times 24 = 960$ वर्ग मीटर हैं। अतः वर्षा लगभग 4 टन ($4 \times 960 = 3840$ कि० ग्रा०) पानी से बाड़े की सिंचाई करती है।

दृश्य-सुगमता के लिये यह भी परिकलन कर लें कि इतने पानी से यदि आपको बाड़े की सिंचाई खुद करनी होती, तो आपको कितनी बाल्टियाँ ढोनी पड़तीं। एक बाल्टी में लगभग 12 कि० ग्रा० पानी आता है। अतः बारिश से कुल $3840 : 12 = 320$ बाल्टी पानी मिला है;

इस प्रकार, करीब-चौथाई घंटे की वर्षा द्वारा की गई सिंचाई के तुल्य काम करने के लिये आपको 300 से अधिक बाल्टी पानी ढोना पड़ता।

संख्याओं में हल्की या घोर वर्षा को कैसे व्यक्त करेंगे? इसके लिये निर्धारित करना होगा कि **एक मिनट में** कितना मिलिमीटर पानी पड़ता है। इसे हम अवसादन-शक्ति कहते हैं। यदि वर्षा ऐसी हो कि **प्रति मिनट** औसत 2 मि० मी० पानी की परत बनती है, तो यह घनघोर वर्षा है। जब झींसी पड़ती है, तो घंटे या इससे भी अधिक समय में कहीं 1 मि० मी० पानी जमा होता है।

इस प्रकार आप देखते हैं कि वर्षा के रूप में गिरने वाले पानी को नापना असंभव नहीं है और कुछ जटिल भी नहीं है। यही नहीं, यदि आप चाहें तो वर्षा की बूंदें भी लगभग की संख्या में ज्ञात कर सकते हैं।* साधारण वर्षा की 12 बूंदे मिलकर एक ग्राम के बराबर होती हैं। अतः जिस वर्षा की बात हम ऊपर कर रहे थे, बाड़े के एक वर्ग मीटर छेत्र में उसकी $4000 \times 12 = 48\,000$ बूंदे पड़ी थीं।

आप यह भी ज्ञात कर सकते हैं कि पूरे बाड़े पर वर्षा की कितनी बूंदें गिरी होंगी। लेकिन बूंदे आप सिर्फ मनोरंजन के लिये गिन सकते हैं; इससे कोई व्यावहारिक लाभ नहीं है। हम सिर्फ यह दिखाना

---

*वर्षा हमेशा बूंदों के रूप में होती है; तब भी, जब वह सतत धार के रूप में प्रतीत होती है (जैसे मुसलाधार वर्षा में)।

चाहते थे कि पहली निगाह में असंभव प्रतीत होने वाले परिकलन भी संपन्न किये जा सकते हैं, यदि आपको करना आता हो।

97. **कितना हिम?** हम वर्षा के रूप में गिरे पानी की मात्रा ज्ञात करना सीख चुके हैं। और ओले के रूप में गिरे पानी को कैसे नापें? ठीक उसी विधि से। ओले वृष्टिमापी में गिरते हैं और थोड़ी देर में पिघल कर जल में परिवर्तित हो जाते हैं। आप इस जल को नाप लेते हैं और आपको आवश्यक आँकड़े मिल जाते हैं।

वर्फ के फाहों के रूप में गिरे पानी को अन्य विधि से नापना पड़ता है। यहाँ हमारा वृष्टि-मापक अत्यंत अशुद्ध परिणाम देगा, क्योंकि बालटी में गिरे बर्फ के फाहे हवा के झोंके से पुनः वातावरण में उड़ जाते हैं। लेकिन इस हिमपात से प्राप्त पानी को नापने के लिये बिना किसी वृष्टि-मापी के भी काम चला सकते हैं: आंगन, बाड़े या खेत में पड़ी बर्फ की परत को लकड़ी के किसी गज या मीटर से सीधा नापा जा सकता है। इस बर्फ के पिघलने से पानी की कितनी मोटी परत बनेगी, यह ज्ञात करने के लिये एक प्रयोग करते हैं: एक बाल्टी में उतनी ही भुरभुरी वर्फ ले कर उसे पिघलने के लिये छोड़ दें। इसके बाद आप देख सकते हैं कि पानी की कितनी मोटी परत बनती है। इस प्रकार आप निर्धारित कर सकते हैं कि बर्फ की एक सेंटीमीटर मोटी परत से पानी की कितनी मिलिमीटर मोटी परत प्राप्त होगी। यह जान लेने के बाद बर्फ की परत को पानी की परत में बदलना कठिन नहीं होगा।

यदि आप हर दिन बिना नागा गर्मियों में वर्षा का जल नापेंगे और उसमें सर्दियों की बर्फ से बना पानी जोड़ देंगे, तो आप स्थानीय क्षेत्र में गिरने वाले पानी की वार्षिक मात्रा ज्ञात कर लेंगे। यह एक महत्वपूर्ण परिणाम होगा, जो उक्त क्षेत्र में अवसादन की कुल मात्रा बताता है। ("अवसादन" वातावरण से गिरने वाले जल को कहते हैं, चाहे वह वर्षा के रूप में गिरे, या ओले या बर्फ आदि के रूप में गिरे।)

सोवियत संघ में विभिन्न नगरों में अवसादन की वार्षिक मात्रा निम्न है:

लेनिनग्राद	47 से० मी०	ग्रास्त्रखान	14 से० मी०
बोलग्दा	45 »	कुताइसी	179 »
ग्रर्खांगेल्स्क	41 »	बाकू	24 »
मास्को	55 »	स्वेर्दलोव्स्क . . .	36 »
कस्त्रोमा	49 »	तबोल्स्क	43 »
कजान	44 »	सेमीपलातिन्स्क . .	21 »
कूइबिशेव	39 »	ग्रल्मा-ग्राता . . .	51 »
ग्रोरेनबुर्ग	43 »	ताशकेन्त	31 »
ग्रोडेसा	40 »	येनिसेइस्क . . .	39 »
		इरकूत्स्क	44 »

उपरोक्त स्थानों में ग्राकाश से सबसे ग्रधिक जल कुताइसी को प्राप्त होता है (179 सें० मी०) ग्रौर सबसे कम ग्रास्त्राखान को (14 सें० मी०); कुताइसी से 13 गुना कम। पृथ्वी-तल पर ऐसे भी स्थान हैं, जहाँ कुताइसी से भी बहुत ग्रधिक ग्रवसादन होता है। उदाहरण के लिये, भारत में एक स्थान ग्रक्षरशः वर्षा के पानी से डूब जाता है; वहाँ 1260 से० मी०, ग्रर्थात $12^1/_2$ मीटर वर्षा होती है! एक बार ऐसा भी हुग्रा था कि एक दिन-रात में वहाँ 100 सें० मी० से भी ग्रधिक पानी पड़ा। इसके विपरीत, ऐसे भी स्थान हैं, जहाँ साल में ग्रास्त्राखान से भी बहुत कम पानी पड़ता है: दक्षिण ग्रमेरिका के एक क्षेत्र, चीली में पूरे वर्ष भर में 1 सें० मी० भी पानी नहीं पड़ता।

वे क्षेत्र, जहाँ 25 सें० मी० से कम ग्रवसादन होता है, सूखे का क्षेत्र कहलाते हैं। वहाँ ग्रन्नोत्पादन बिना कृत्रिम सिंचाई के नहीं हो सकता।

यदि ग्राप का निवास ऊपर गिनाये स्थानों में से किसी एक में नहीं है, तो ग्रापको ग्रपने क्षेत्र में ग्रवसादन की वार्षिक मात्रा स्वयं निर्धारित करनी पड़ेगी। धैर्यपूर्वक पूरे साल वर्षा, ग्रोले ग्रौर हिम के रूप में गिरने वाले पानी को नापने के बाद ग्राप ज्ञात कर सकेंगे कि ग्रार्द्रता के दृष्टिकोण से सोवियत संघ के ग्रन्य नगरों के बीच ग्रापके शहर को कौनसा स्थान प्राप्त है।

समझना कठिन नहीं है कि पृथ्वी-तल के विभिन्न क्षेत्रों में अवसादन-मात्रा नाप कर प्राप्त आँकड़ों से यह ज्ञात किया जा सकता है कि सारी धरती पर अवसादन के फलस्वरूप पानी की कितनी मोटी परत बन सकती है। ज्ञात होता है कि सारे थल पर (सागरों पर प्रेक्षण नहीं किया जाता) वर्ष में अवसादन की मात्रा औसतन 78 सें० मी० है। यह माना जाता है कि सागर तल पर उतना ही पानी पड़ता है, जितना समान क्षेत्रफल वाले थल पर। परिकलन करना कठिन नहीं होगा कि हमारे ग्रह पर वर्षा, ओले, हिम आदि रूपों में प्रति वर्ष कितना पानी पड़ता है। इसके लिये पृथ्वी-तल का क्षेत्रफल जानना होगा। यदि आप यह परिमाण कहीं से ज्ञात नहीं कर सकते, तो निम्न विधि से, स्वयं इसका परिकलन कर ले सकते हैं।

आपको ज्ञात है कि एक मीटर पृथ्वी की परिधि का 4-करोड़वाँ अंश है (परिभाषा से)। अन्य शब्दों में, पृथ्वी की परिधि 40 000 000 मीटर, अर्थात् 40 000 कि० मी० है। किसी भी वृत्त की चौड़ाई उसकी परिधि से लगभग $3^1/_7$ गुनी कम होती है। इस सूचना के आधार पर हम अपने ग्रह का व्यास ज्ञात कर सकते हैं:

$$40\,000 : 3^1/_7 \approx 12\,700$$ कि० मी०.

किसी भी गोले की सतह का क्षेत्रफल ज्ञात करने की विधि यह है: उसकी चौड़ाई को स्वयं से और $3^1/_7$ से गुणा कर देते हैं

$$12\,700 \times 12\,700 \times 3^1/_7 \approx 509\,000\,000$$ वर्ग कि० मी०.

(उत्तर में चौथे अंक से हम शून्य लिखना शुरू कर देते हैं, क्योंकि सिर्फ प्रथम तीन अंक विश्वसनीय हैं।)

इस प्रकार, समस्त पृथ्वी-तल का क्षेत्रफल 5090 लाख वर्ग कि० मी० है।

अब हम अपने प्रश्न की ओर लौटें। हिसाब लगायें कि प्रति वर्ग कि० मी० पृथ्वी-तल पर कितना पानी पड़ता है। एक वर्ग मीटर या 10 000 वर्ग सें० मी० पर पानी पड़ता है

$$78 \times 10\,000 = 780\,000$$ घन सें० मी०।

एक वर्ग कि० मी० में $1000 \times 1000 = 1\,000\,000$ वर्ग मीटर होते हैं। अतः उस पर 780 000 000 000 घन सें० मी० या 780000 घन मीटर पानी पड़ता है।

सारे पृथ्वी-तल पर पड़ता है

$$780\,000 \times 509\,000\,000 = 397\,000\,000\,000\,000 \text{ घन मीटर।}$$

घन मीटरों की इस संख्या को घन कि० मी० की संख्या में परिवर्तित करने के लिये इसमें $1000 \times 1000 \times 1000$ से भाग देते हैं। प्राप्त होता है 397 000 घन कि० मी०।

इस प्रकार हम देखते हैं कि हमारे ग्रह पर वातावरण से प्रति वर्ष लगभग 400 000 घन किलोमीटर पानी अवसादित होता है।

यहाँ हम बारिश और हिमपात की ज्यामिति पर अपनी वार्ता समाप्त करते हैं। जो कुछ भी इस अध्याय में कहा गया है, मौसम-विज्ञान की पुस्तकों में आप सविस्तार पढ़ सकते हैं।

अध्याय 11

गणित और "प्रलय-पुराण"

•

98. **प्रलय-कथा**. बाइबिल में संकलित कथाओं में एक ऐसी भी है, जिसके अनुसार एक बार सारी धरती वर्षा के जल से डूब गयी थी। ऊँचे से ऊँचे पर्वत भी जल-लीन थे। बाइबिल के अनुसार, एक बार भगवान को "पाश्चाताप होने लगा कि उसने मनुष्य की सृष्टि की"। उसने कहा :

– जिनको मैंने रचा है, धरातल से मिटा दूंगा; मनुष्यों से ले कर पशुओं तक, सरीसृपों से ले कर नभगामी पक्षियों तक, सब को नष्ट कर दूंगा।

पुण्यात्मा नूह ही एक आदमी था, जिस पर भगवान दया करना चाहते थे। भगवान ने उसे प्रलय की तैयारी के बारे में बताया और एक नाव बनाने की आज्ञा दी, जिसका आकार निम्न था: "नाव की लंबाई 300 हाथ, चौड़ाई 50 हाथ और ऊँचाई 30 हाथ होनी चाहिये।" नाव तिमंजिला थी। इस नाव से सपरिवार नूह की ही नहीं, बल्कि जीवों के सभी प्रकारों की भी रक्षा होने वाली थी। भगवान ने नूह को सभी जीवों के एक-एक जोड़े को अपनी नाव में शरण देने की आज्ञा दी। नूह को उनके लिये भोजन-सामग्री का पर्याप्त भण्डार भी साथ रखना था: प्रलय-लीला काफी दिनों तक चलने वाली थी।

दुनिया के थल-जीवियों को नष्ट करने का साधन भगवान ने बाढ़ को चुना। जमीन पर जीने वाले सभी जंतुओं और लोगों को जल में डुबा देना था। नूह और उसके द्वारा बचाये गये जीवों से नयी मानव-जाति और नये जीव-जगत को उत्पन्न होना था।

"सातवें दिन, – बाइबिल आगे कहती है, – बाढ़ का पानी जमीन पर उतरा... 40 दिन और 40 रात मुसलाधार वर्षा होती रही... पानी बढ़ता गया और नाव को ऊपर उठाता गया; और वह बेसहारा तैर रहा था... पानी इतना अधिक हो गया कि सभी ऊँचे पर्वत-शिखर, जो नील नभ के नीचे अडिग खड़े थे, डूब गये; पानी की सतह उनसे 15 हाथ ऊँची थी... सारी धरती के तल पर जो भी जीव थे, डूब गये। बचे सिर्फ नूह और जो उसके साथ थे।" पानी – बाइबिल के कथनानुसार – जमीन पर 110 दिन तक और रुका रहा; इसके बाद वह गायब हो गया और नूह अपने जीव-जंतुओं के साथ नाव से बाहर आया, ताकि बियाबान धरती को फिर से बसा सके।

इस कथा के बारे में हम दो प्रश्न रखते हैं:

1) ऐसी वर्षा संभव थी या नहीं, जो सारी पृथ्वी और ऊँचे से ऊँचे पर्वतों को डुबा सके?

2) नूह की नौका में सभी थल-जीवियों के एक-एक जोड़े अँट सकते थे या नहीं?

99. बाढ़ संभव थी या नहीं. दोनों ही प्रश्नों का उत्तर गणित की सहायता से दिया जा सकता है।

ऐसी बाढ़ लाने वाली वर्षा के लिये इतना पानी कहाँ से आ सकता है? सिर्फ वातावरण से। वह पानी इसके बाद कहाँ गया? विश्व-प्रलय के इतने पानी को जमीन नहीं सोख सकती। पर हमारे ग्रह से वह बाहर भी नहीं जा सकता। एकमात्र स्थान, जहाँ पानी वापस लौट सकता है, वातावरण है: प्रलय-जल वाष्प बन कर पृथ्वी के वातावरण में ही विलीन हो सकता था। उस पानी को अब भी वातावरण में ही होना चाहिये। इसका अर्थ है कि हवा में उपस्थित सारा जलवाष्प यदि जम कर पुनः वर्षा का पानी बन जाये, तो एक बार फिर से वैसा ही प्रलय हो जायेगा; विश्व के ऊँचे से ऊँचे पर्वत-शिखर भी फिर से डूब जायेंगे। देखें, यह सही है, या नहीं।

मौसम-विज्ञान के सूचना-कोष से ज्ञात करें कि पृथ्वी के वातावरण में कितनी आर्द्रता उपस्थित है। ज्ञात होता है कि एक वर्ग-मीटर आधार वाले वायु-स्तंभ में औसतन 16 कि० ग्रा० के लगभग जलवाष्प होता है। उसकी मात्रा 25 कि० ग्रा० से अधिक कभी नहीं होती। अब

हिसाब करें कि यदि यह जलवाष्प जम कर वर्षा के रूप में पृथ्वी पर गिरे, तो पानी की कितनी मोटी परत बनेगी। 25 कि० ग्रा०, अर्थात 25000 ग्राम पानी का आयतन 25 000 घन सें० मी० होता है। यह आयतन उस परत का होगा, जिसके आधार का क्षेत्रफल 1 वर्ग मीटर या $100 \times 100 = 10\,000$ वर्ग सें० मी० है। आयतन में आधार के क्षेत्रफल से भाग दे कर परत की मुटाई (ऊँचाई)

$$25000 : 10\,000 = 2.5 \text{ सें० मी०}$$

ज्ञात करते हैं।

2.5 से० मी० से अधिक बाढ़ नहीं उठ सकी होगी, क्योंकि वातावरण में इससे अधिक पानी नहीं होता।* और पानी की यह ऊँचाई भी तब हो सकती है, जब वर्षा का पानी जमीन में बिल्कुल नहीं सोखा जाये।

यदि कोई प्रलय सचमुच हुआ था, तो हमारा परिकलन दिखाता है कि पानी की परत की मुटाई उस समय कितनी रही होगी: 2.5 सें० मी०। उच्चतम पर्वत-शिखर एवरेस्ट से, जिसकी ऊँचाई 9 कि० मी० है, यह बहुत दूर है। बाढ़ के पानी की ऊँचाई बाइबिल की कथा में ठीक 360 000 गुना बढ़ा कर बतायी गयी है।

इस प्रकार, यदि "प्रलय" के लिये पूरी दुनिया में वर्षा हुई भी थी, तो यह अधिक शक्तिशाली वर्षा नहीं थी, क्योंकि 40 दिन और 40 रात में सिर्फ 25 मि० मी० (चौबिस घंटों में आधे मि० मी० से भी कम) अवसादन हुआ था। पतझड़ के समय की एक हल्की वर्षा भी चौबिस घंटों में इससे 20 गुना अधिक पानी देती है।

100. क्या नूह की नौका संभव है? अब दूसरे प्रश्न का अवलोकन करें: क्या नूह की नौका में सभी थल-जीवी अँट सकते थे?

---

*दुनिया में कई जगहें ऐसी भी हैं, जहाँ एक बार में 2.5 सें० मी० से भी अधिक अवसादन होता है। पर यह स्थानीय हवा से नहीं, बल्कि समीपवर्ती स्थानों की हवा के साथ लायी गई आर्द्रता से होता है। "विश्व-प्रलय" एक ही साथ सारी दुनिया में शुरू हुआ था, अतः कहीं दूसरी जगह से आर्द्रता आने का कोई प्रश्न नहीं उठता।

नौका में रहने लायक स्थान का क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं। बाइबिल की कथा के अनुसार नौका तिमंजिला थी। उनमें से हरेक मंजिल 300 हाथ लंबी और 50 हाथ चौड़ी थी। "हाथ" प्राचीन पाश्चात्य एशिया-वासियों के लिये लंबाई नापने की इकाई था, जो लगभग 45 से॰ मी॰ या 0.45 मीटर के बराबर होती है। अतः नौका की प्रत्येक मंजिल के परिमाण हमारी इकाइयों में इस प्रकार थे :

लंबाई $300 \times 0{,}45 = 135$ मीटर
चौड़ाई $50 \times 0{,}45 = 22{,}5$ मीटर

फर्श का क्षेत्रफल : $135 \times 22{,}5 \approx 3040$ वर्ग मीटर.

अतः तीनों मंजिलों को मिला कर रहने की जगह का क्षेत्रफल था :

$3040 \times 3 = 9120$ वर्ग मीटर।

इतना स्थान क्या दुनिया के सभी **स्तनपायी जीवों** के लिये भी काफी रहेगा? विभिन्न थल-जीवी स्तनपायी जीवों की संख्या लगभग 3500 है। नूह को सिर्फ जीवों के लिये ही नहीं, बल्कि 150 दिन लंबे प्रलय-काल के दरमियान उनके खाने की सामग्री के लिये भी जगह चाहिये थी। हिंसक पशुओं को अपने लिये भी जगह चाहिये थी और दूसरे पशुओं के लिए भी, जिन्हें वे खाते हैं। फिर इन पशुओं के लिये भी खाने की सामग्री चाहिये! नौका में हर जोड़े जीव के लिये सिर्फ

$9120 : 3500 = 2.6$ वर्ग मीटर

ही जगह बचती थी।

निवास स्थान का यह "कोटा" स्पष्टतः अपर्याप्त है, खास कर उस हालत में, जब कुछ जगह नूह के बहुसंख्यी परिवार के लिये भी चाहिये थी। इसके अतिरिक्त, पिंजड़ों के बीच आने-जाने के रास्ते के लिये भी कुछ जगह रखनी थी।

लेकिन स्तनपाइयों के अतिरिक्त और भी तो कई जीव हैं, जो आकार में बड़े नहीं होते, पर प्रकार में बहुत हैं। उनकी लगभग की संख्या इस प्रकार है :

चिड़िये	13 000
सरीसृप	3 500
जलथली	1 400
मकोड़े	16 000
कीड़े-पतंगे	360 000

यदि सिर्फ स्तनपाइयों के लिये जगह पर्याप्त नहीं थी, तो इतने ग्रौर जीवों के लिये जगह बचने का प्रश्न ही नहीं उठता। इन सारे थल-जीवियों को बचाने के लिये नूह की नौका कई गुनी बड़ी होनी चाहिये थी। वैसे, बाइबिल में बताये गये ग्राकार के ग्रनुसार नूह की नौका पूरा जहाज हो थी: नाविकों के शब्दों में, उसकी जल-विस्थापन की शक्ति 20 000 टन थी। यह बिल्कुल ग्राशातीत है कि उस पुराने जमाने में, जब नौका-निर्माण की कला का सिर्फ जन्म हुग्रा था, लोग इस ग्राकार का जहाज बना सकते थे। इसके बावजूद भी वह इतना बड़ा नहीं था कि वह बाइबिल की कथा में वर्णित काम में ग्रा सकता। इसके लिये पूरा चिड़ियाघर चाहिये था, जिसमें 5 महीनों की भोजन सामग्री संचित हो।

तात्पर्य यह है कि विश्व-प्रलय के बारे में बाइबिल की कथा का गणितीय परिकलनों के साथ इतना भी मेल नहीं बैठता कि उसमें सत्य का कम से कम एक कण भी ढूढ़ा जा सके। संभावना यही है कि इस कथा का ग्राधार कोई स्थानीय बाढ़ है ग्रौर बाकी सब कुछ पूर्वी कल्पना-शक्ति की उर्वरता का परिणाम है।

अध्याय 12

तीस मिले-जुले प्रश्न

आशा है कि इस पुस्तक के साथ पाठक का परिचय निरर्थक नहीं रहा। इससे उसका कोरा मनोरंजन ही नहीं, कुछ लाभ भी हुआ होगा। कुशाग्रता व प्रत्युत्पन्नमतित्व का विकास करना तथा ज्ञान के उपयोग में कुशलता प्राप्त कराना ही इस पुस्तक का ध्येय था। पाठक शायद अब अपनी बुद्धिमत्तता की परीक्षा लेना चाहता है। इसके लिये यहाँ तीस विभिन्न प्रकार के प्रश्न दिये जा रहे हैं।

101. जंजीर. लोहार के पास जंजीर की पाँच टुकड़ियाँ जोड़ने के लिये लायी गयीं। प्रत्येक में तीन कड़ियाँ थीं।

काम शुरू करने के पहले लोहार सोचने लगा: कितनी कड़ियों को खोलना चाहिये कि जंजीर फिर से पूरी जोड़ी जा सके। सोच-विचार कर उसने निश्चय किया कि **चार** कड़ियाँ खोलनी पड़ेंगी।

क्या कुछ कम कड़ियों को खोलने से काम नहीं चलेगा?

102. मकड़े और मुंगरे. एक बच्चे ने डिब्बी में कुछ मकड़ों और मुंगरों को पकड़ कर रखा, जिनकी कुल संख्या 8 थी। यदि उनके पैरों की गिनती की जाये, तो कुल 54 पैर होते हैं।

कितने मकड़े और कितने मुंगरे डिब्बी में थे?

103. टोप, बरसाती और जूते. किसी ने एक टोप, एक बरसाती और एक जोड़े जूते खरीदे। इसके लिये उसे 20 रूबल देने पड़े। बरसाती टोप से 9 रूबल अधिक कीमती है, टोप और बरसाती दोनों की सम्मिलित कीमत जूतों की कीमत से 16 रूबल अधिक होती है। इनमें से प्रत्येक वस्तु की अलग-अलग कीमत बतायें।

चित्र 91. सिकड़ी की पाँच टुकड़ियां।

प्रश्न मुजबानी हल करना है; समिकरणों की मदद से नहीं।

104. मुर्गी और बत्तख के अंडे. अंडों की टोकरियाँ रखी हैं। कुछ में मुर्गियों के अंडे हैं और कुछ में बतखों के। उनकी संख्यायें हैं–5,6,12,14,23 और 29। "यदि मैं इस टोकरी को बेच दूं,–दुकानदार सोचता है,–तो मेरे पास बतख के अंडों से दुगुने मुर्गी के अंडे बच जायेंगे"।

दुकानदार किस टोकरी के बारे में सोच रहा था?

105. उड़ान. शहर A से शहर B तक उड़ने में हवाई जहाज को 1 घंटा 20 मिनट लगते हैं। पर वापस उड़ने में उसे सिर्फ 80 मिनट लगते हैं। क्या कारण है इसका?

106. पैसों का उपहार. एक पिता ने अपने पुत्र को 150 रूबल दिये। दूसरे ने अपने बेटे को 100 रूबल दिये। पता चला कि दोनों बेटों की सम्मिलित पूंजी में सिर्फ 150 रूबल की वृद्धि हुई है। यह कैसे?

107. दो गोटियां. खाली ड्राफ्टस* के घरों में एक सफेद और एक काली गोटियाँ रखनी है। कितने प्रकार से उनकी स्थितियाँ बदली जा सकती हैं?

108. दो अंकों से. दो अंकों की मदद से कौन सी न्यूनतम पूर्ण संख्या लिखी जा सकती है?

109. इकाई. सभी दस अंकों की मदद से संख्या 1 को व्यक्त करें।

---

*ड्राफ्टस शतरंज के तख्ते पर ही खेलते हैं। फर्क इतना है कि ड्राफ्टस की गोटियाँ सिर्फ काले घरों पर रखते हैं। सफेद घर बेकार होते हैं।

110. पाँच नहलों से. पाँच नहलों की मदद से संख्या 10 को व्यक्त करना है। कम से कम दो विधियाँ बतायें।

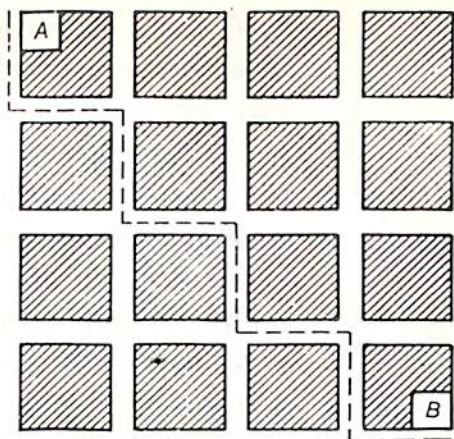
111. सभी दस अंकों से. सभी दस अंकों का प्रयोग करते हुए संख्या 100 को व्यक्त करें। कितनी तरह से आप यह कर सकते हैं? कम से कम चार विधियाँ हैं इसके लिये।

112. चार तरीकों से. किन्हीं पाँच समान अंकों का प्रयोग कर चार तरीकों से संख्या 100 को व्यक्त करें।

113. चार इकाइयों से. चार बार एक का प्रयोग कर कौन सी अधिकतम संख्या लिख सकते हैं?

114. रहस्यमय विभाजन. भाग के निम्न उदाहरण में सभी अंकों की जगह तारक-चिन्ह लगे हैं; सिर्फ चार चौवे बचे हैं। तारों की जगह लुप्त अंकों को लिखें।

इस प्रश्न के कई हल हो सकते हैं।

115. एक और विभाजन. निम्न उदाहरण में भी लुप्त अंकों को ढूढ़ना है। इसमें सिर्फ सात सत्ते बचे हैं:

चित्र 92. जंगल में विश्रामकुटियों के पथ पर वर्गाकार टुकड़ियां हैं।

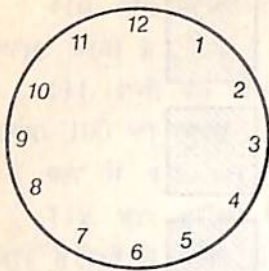
116. कितना लंबा? मन ही मन हिसाब लगायें कि एक वर्ग मीटर के सभी मिलिमीटर भुजा वाले वर्गों को एक कतार में सटा-सटा कर रखने पर कितना लम्बा फीता मिलेगा।

117. ऐसा ही एक और प्रश्न. मन ही मन हिसाब लगायें कि एक घन मीटर के सभी मिलिमीटर भुजा वाले घनों को एक के ऊपर एक रखने पर कितना ऊँचा स्तंभ मिलेगा।

118. हवाई जहाज. डैनों सहित 12 मीटर की चौड़ाई वाले हवाई जहाज का चित्र उस समय खींचा गया, जब वह ठीक कैमरे के ऊपर से उड़ रहा था। कैमरे की गहराई (विक्ष से पर्दे की दूरी) 12 से॰ मी॰ है और चित्र का आकार 8 मि॰ मी॰ है।

चित्र खींचते समय हवाई जहाज कितना ऊँचा उड़ रहा था?

119. एक मिलियन वस्तुयें. किसी वस्तु का वजन 89.4 ग्राम है। मन में हिसाब लगायें कि एक मिलियन (दस लाख) वैसी ही वस्तुओं का वजन कितना होगा।

120. राहों की संख्या. चित्र 92 में आप वर्गाकार घरों को देख रहे हैं। हरेक के चारों तरफ रास्ते बने हुए हैं। स्थान A से स्थान B तक बिंदुओं द्वारा एक पथ प्रदर्शित किया गया है। निस्संदेह, उक्त

स्थानों के बीच यह एकमात्र पथ नहीं है। समान लंबाई के और कितने पथ आप ढूंढ़ सकते हैं?

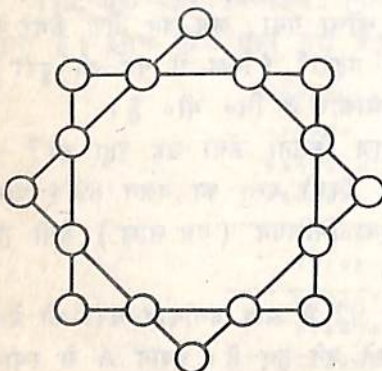
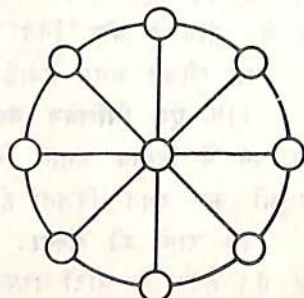
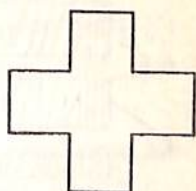
चित्र 93. इस डायल को भागों में बाँटना है।

121. घड़ी का डायल. इस डायल को (चित्र 93) किसी भी आकार के छः भागों में बाँटना है। शर्त्त यह है कि हर भाग में संख्याओं का योग समान हो।

प्रश्न का लक्ष्य यह परखना नहीं है कि आप कितने समझदार हैं, बल्कि यह देखना है कि आप कितनी जल्दी समझ लेते हैं।

122. अष्टकोण सितारा. चित्र 94 की आकृति में रेखाओं की कटान-बिंदुओं पर 1 से 16 तक की संख्याओं को इस प्रकार लिखना है कि हर वर्ग की हर भुजा पर संख्याओं का योग 34 हो। हर वर्ग के शीर्षों की संख्याओं का योग भी 34 होना चाहिये।

123. संख्या-चक्र. 1 से 9 तक की संख्याओं को चित्र 95 की आकृति में इस प्रकार लिखना है कि एक संख्या केंद्र में हो और अन्य संख्यायें व्यासों के किनारों पर हों। प्रत्येक कतार की तीनों संख्याओं का योग 15 होना चाहिये।

124. तिपाई. लोग कहते हैं कि तिपाई कभी भी हिलती-डुलती नहीं है, चाहे उसके पैरों की लंबाई असमान ही क्यों न हों। क्या यह सच है?

चित्र 94. अष्टकोण सितारा।

चित्र 95. संख्या-चक्र

चित्र 96. सूइयों के बीच कितने डिग्री के कोण हैं?

चित्र 97. चंद्र-हसिया को सलीब में कैसे "परिणत करें?"

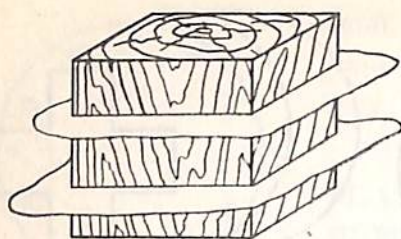
125. कोणों की मात्रायें. चित्र 96 की घड़ियों में सूइयों के बीच कितने डिग्री के कोण हैं? उत्तर कोण-मापी चांद की मदद से नहीं, बल्कि तर्क से देना है।

126. भूमध्यरेखा पर. यदि हम भूमध्य रेखा पर पृथ्वी के चारों ओर घूम आयें, तो तलुओं के बिंदुओं की अपेक्षा हमारे सर का शीर्ष अधिक लंबा रास्ता तय करेगा। दोनों के पथों का अंतर बतायें।

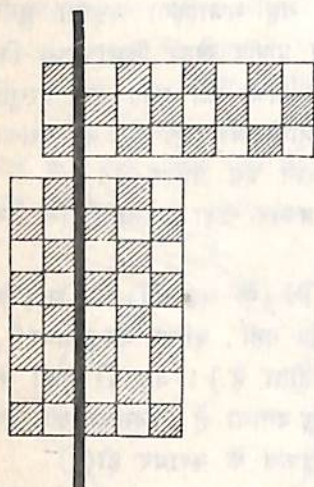
127. छे कतारों में. आपने शायद यह मजाकिया कहानी सुनी हो: नौ घोड़ों को दस नादों के पास इस प्रकार खड़ा किया गया कि हर नाद के सामने एक घोड़ा खड़ा हो। अभी जो प्रश्न हम प्रस्तुत कर रहे हैं, वाह्य रूप से इस विख्यात कहानी जैसा ही है, पर इसका हल काल्पनिक नहीं, बल्कि यथार्थ है। प्रश्न इस प्रकार है:

24 व्यक्तियों को 6 कतारों में इस प्रकार खड़ा करना है कि हर कतार में 5 व्यक्ति हों।

128. क्रौस और अर्द्ध-चंद्र. चित्र 97 में अर्द्ध-चंद्र की आकृति दिखायी गयी है (सच पूछें तो यह अर्द्ध-चंद्र नहीं, बल्कि चंद्र-हसिया है, क्योंकि अर्द्ध-चंद्र अर्द्ध-वृत्त के आकार का होता है)। यह दो वृत्तों के चापों से बना है। रेड-क्रौस का एक चिह्न बनाना है, जिसका क्षेत्रफल ज्यामिति के अनुसार ठीक अर्द्ध-चंद्र के क्षेत्रफल के बराबर हो।

129. घन और काट. आपके पास एक घन है, जिसका हर किनारा 3 से० मी० लंबा है। उसका आयतन 27 घन से० मी० होगा और उसे 27 नन्हे घनों में काटा जा सकता है, जिसमें से हरेक का किनारा 1 से० मी० लंबा होगा। घन को छः समतलों पर काट कर

चित्र 98. किसी एक फलक के समानांतर दो समतल खींचने होंगे।...

यह कार्य सरलतापूर्वक किया जा सकता है: दो समतल एक पार्श्व के समानांतर होंगे, दो दूसरे के और दो तीसरे के समानांतर होंगे। अब कल्पना कीजिये कि आपको हर काट के बाद घन के भागों को व्योम में खिसकाने की अनुमति मिल गयी है: कोई भाग काटने के बाद आप उसे दूसरे पर इस प्रकार रख सकते हैं कि उन्हें काटने वाला अगला समतल दोनों भागों से पूरा-पूरा गुजर सके। घन को 27 नन्हे घनों में काटने वाले समतलों की संख्या इस अतिरिक्त संभावना की मदद से आप कम कर सकते हैं या नहीं?

130. एक और कटान. यह प्रश्न पिछले से मिलता-जुलता है, पर कुछ भिन्न है। साधारण शतरंज-पट्ट को, जिसमें 64 नन्हे वर्ग (8×8) होते हैं, अलग-अलग वर्गों में काटना है। आपको सिर्फ सीधी रेखाओं पर काटने की अनुमति है। लेकिन हर कटान के बाद आप टुकड़ों को एक दूसरे पर इस प्रकार रख सकते हैं कि अगली सीधी कटान से एक नहीं, बल्कि कई टुकड़े एक साथ कट जायें। पूरे पट्टे को अलग-अलग 64 वर्गों में काटने के लिये आपको कितनी सीधी कटानें लगानी होंगी?

चित्र 99. अगली कटान डालने के पहले टुकड़ों को एक-दूसरे पर रख सकते हैं।

101 — 130 पहेलियों के उत्तर

101. यह काम सिर्फ तीन कड़ियों को खोल कर किया जा सकता है। इसके लिये एक टुकड़ी की तीनों कड़ियों को खोल कर उनसे अन्य टुकड़ियों के सिरों को मिलाना होगा।

102. इस प्रश्न को हल करने के लिये आपको जीव-विज्ञान की कुछ बातें याद करनी होंगी: मुंगरे के 6 पैर होते हैं और मकड़े के 8।

यह ज्ञात करने के बाद मान लें कि डिब्बी में सिर्फ 8 मुंगरे हैं। सभी पैरों की संख्या $6 \times 8 = 48$ होंगी। प्रश्न की शर्त्त के अनुसार यह 6 कम है। अब एक मुंगरे को हटा कर उसकी जगह एक मकड़े को रख दें। इससे पैरों की संख्या पहले से दो अधिक हो जायेगी, क्योंकि मकड़े के छ: नहीं, बल्कि 8 पैर होते हैं।

स्पष्ट है कि यदि इस प्रकार दो और मुंगरों को बदल दिया जाये, तो हम पैरों की कुल संख्या 54 तक बढ़ा सकते हैं। इस हालत में 8 मुंगरों में से सिर्फ 5 बच जायेंगे और बाकी मकड़े होंगे।

अतः डिब्बी में 5 मुंगरे और 3 मकड़े थे।

उत्तर जाँचा जाय: 5 मुंगरों के 30 पैर हुए और 3 मकड़ों के – 24 पैर। कुल होते हैं $30 + 24 = 54$, जो प्रश्न की शर्त्त को पूरा करता है।

इस प्रश्न को दूसरे तरीके से भी हल किया जा सकता है। मान लें कि डिब्बी में सिर्फ मकड़े हैं; उनकी संख्या 8 है। पैरों की कुल संख्या $8 \times 8 = 64$ होगी। यह प्रश्न की शर्त्त में बतायी गयी संख्या से 10 अधिक है। एक मकड़े को हटा कर उसकी जगह एक मुंगरे को रखने पर पैरों की संख्या 2 कम हो जायेगी। अतः पाँच मकड़ों को हटा कर उनकी जगह पाँच मुंगरे रखने चाहिये, ताकि पैरों की संख्या घट कर 54 हो जाये। दूसरे शब्दों में, 8 मकड़ों में से सिर्फ 3 रहने दें और बाकी को मुंगरों से बदल दें।

103. यदि बरसाती, टोप और जूतों की जगह सिर्फ दो जोड़े जूते खरीदे गये होते, तो 20 रूबल नहीं, बल्कि कुछ कम रूबल देने पड़ते – उतना कम, जितना जूते सस्ते हैं बरसाती और टोप से, अर्थात 16 रूबल देने पड़ेंगे। इससे ज्ञात होता है कि दो जोड़े जूतों की कीमत

20 — 16 = 4 रूबल है। अतः एक जोड़े जूते की कीमत 2 रूबल है।

अब स्पष्ट है कि बरसाती और टोप की सम्मिलित कीमत 20 — 2 = 18 रूबल है। पर बरसाती टोप से 9 रूबल अधिक महंगा है। पहले के विचार-क्रम का अनुसरण करें: बरसाती और टोप की बजाय दो टोप खरीदें। इसके लिए हम 18 रूबल नहीं, बल्कि 9 रूबल कम खर्च करेंगे। अतः दो टोपों की कीमत 18 — 9 = 9 रूबल है; एक टोप की कीमत 4 रूबल 50 कोपेक हुई।

इस प्रकार, वस्तुओं की कीमत निम्न है: जूते – 2 रूबल, टोप – 4 रूबल 50 कोपेक, बरसाती – 13 रूबल 50 कोपेक।

104. दुकानदार 29 अंडों वाली टोकरी के बारे में सोच रहा था। 23, 12 और 5 अंडों वाली टोकरियों में मुर्गियों के अंडे थे और बत्तखों के अंडे – 14 और 6 अंडों वाली टोकरियों में।

उत्तर जाँचें। मुर्गियों के कुल अंडे बचते हैं:

$$23 + 12 + 5 = 40$$

और बत्तखों के

$$14 + 6 = 20$$

बत्तखों के अंडों से मुर्गियों के अंडे दुगुने हैं, जो शर्त के अनुसार है।

105. इस प्रश्न में समझाने के लिये कुछ भी नहीं बचता है: हवाई जहाज को आने और जाने में एक ही समय लगता है, क्योंकि 80 मिनट = 1 घ० 20 मि०।

प्रश्न अन्य-मनस्क पाठक के लिये है जो सोचता है कि 1 घ० 20 मि० और 80 मि० के बीच कोई फर्क है। आश्चर्यजनक बात है कि इस फंदे में बहुत से लोग फँस जाते हैं, और उनमें अधिकतर लोग ऐसे होते हैं, जिन्हें जोड़-घटाव करने की आदत अधिक है। इसका कारण यह है कि लोग मुद्रा-इकाइयों और माप की दशमलव-प्रणाली के आदी हो गये हैं। हम जाने-अनजाने उनकी तुलना 1 रूबल 20 कोपेक और 80 कोपेक के साथ करने लगते हैं। प्रश्न इसी मनोवैज्ञानिक भूल पर आधारित है।

106. इस चक्कर का रहस्य यह है कि दो पिताओं में से एक पुत्र है दूसरे का। कुल मिला कर चार नहीं, बल्कि सिर्फ तीन व्यक्ति हैं: पितामह, पिता और पौत्र। पितामह अपने पुत्र को 150 रूबल देता है और वह पौत्र को (अर्थात अपने पुत्र को) 100 रूबल देता है और इस प्रकार उसकी पूंजी में सिर्फ 50 रूबल की वृद्धि होती है।

107. पहली गोटी को तख्त के 64 घरों में से किसी में रखा जा सकता है, अर्थात 64 विधियों से रखा जा सकता है। उसे रख लेने के बाद दूसरी गोटी को बाकी 64 घरों में से किसी में रखा जा सकता है। इसका अर्थ है कि पहली गोटी की प्रत्येक स्थिति के साथ दूसरी की 63 स्थितियाँ संलग्न की जा सकती हैं। अतः ड्राफ्ट-बोर्ड पर दोनों गोटियों की भिन्न स्थितियों की कुल संख्या

$$64 \times 63 = 4032 \text{ है।}$$

108. दो अंकों की सहायता से, जैसा कुछ पाठक शायद सोचते होंगे, सबसे छोटी संख्या 10 नहीं, बल्कि इकाई लिखी जा सकती है। उसे इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4} \text{ आदि } \frac{9}{9} \text{ तक।}$$

बीज-गणित से परिचित लोग इसमें निम्न व्यंजनों की कतार जोड़ सकते हैं:

$$1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ \text{ आदि } 9^\circ \text{ तक,}$$

क्योंकि शून्य घात की कोई भी संख्या इकाई के बराबर होती है।*

109. इकाई को दो भिन्नों के योग के रूप में व्यवत करना चाहिये:

$$\frac{148}{296} + \frac{35}{70} = 1.$$

बीज-गणित जानने वाले दूसरे तरह से भी उत्तर दे सकते हैं:

$$123456789^\circ; \quad 234567^{9 \cdot 8 \cdot 1}$$

आदि, क्योंकि शून्य घात की संख्या एक के बराबर होती है।

---

* $\frac{0}{0}$ या 0° सही हल नहीं हैं, क्योंकि ये व्यंजन निरर्थक हैं।

110. दो विधियाँ निम्न हैं :

$$9\frac{99}{99}=10,$$
$$\frac{99}{9}-\frac{9}{9}=10.$$

बीज-गणित जानने वाले अन्य उत्तर भी दे सकते हैं, जैसे :

$$\left(9\frac{9}{9}\right)^{\frac{9}{9}}=10,$$
$$9+99^{9-9}=19.$$

111. 4 हल दिये जा रहे हैं :

$$70+24\frac{9}{18}+5\frac{3}{6}=100;$$
$$80\frac{27}{54}+19\frac{3}{6}=100;$$
$$87+9\frac{4}{5}+3\frac{12}{60}=100;$$
$$50\frac{1}{2}+49\frac{38}{76}=100.$$

112. पाँच एक तरह के अंकों की मदद से संख्या 100 को एक, तीन और पाँच (आखिरी सबसे सरल होगा) का व्यवहार कर के लिख सकते हैं :

$$111-11=100;$$
$$33\times3+\frac{3}{3}=100;$$
$$5\times5\times5-5\times5=100;$$
$$(5+5+5+5)\times5=100.$$

113. अक्सर उत्तर देते हैं : 1111। पर इससे कई गुनी बड़ी संख्या लिखी जा सकती है – 11 का ग्यारहवाँ घात : 11^{11}। यदि धीरज हो, तो यह परिकलन पूरा करें (लघुगणकों की सहायता से ऐसे गुणन शीघ्र संपन्न किये जा सकते हैं)। आपको विश्वास हो जायेगा कि यह 280 बिलियन से भी बड़ी संख्या है। अतः यह 1111 से 250 मिलियन गुना अधिक है।

114. भाग का यह उदाहरण निम्न चार विभिन्न स्थितियों के अनुरूप है :

$$1\,337\,174 : 943 = 1\,418;$$
$$1\,343\,784 : 949 = 1\,416;$$
$$1\,200\,474 : 846 = 1\,419;$$
$$1\,202\,464 : 848 = 1\,418.$$

115. इस प्रश्न को विभाजन का सिर्फ एक उदाहरण संतुष्ट कर सकता है :

$$7\,375\,428\,413 : 125\,473 = 58\,781$$

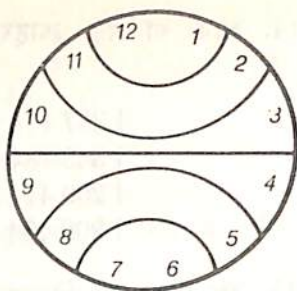
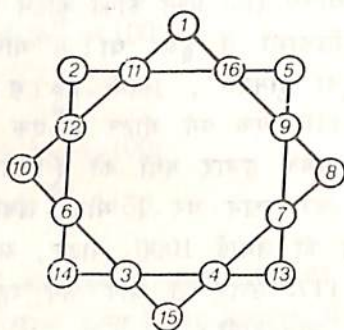
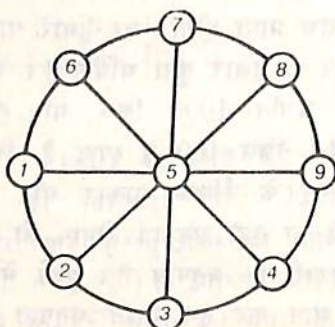
अंतिम दोनों प्रश्न काफी कठिन हैं। उनका प्रथम प्रकाशन अमेरिकन पत्र-पत्रिकाओं में हुआ था : "गणित-सामाचार", 1920 ई० और "स्कूली दुनिया", 1906 ई० में।

116. एक वर्ग मीटर में एक हजार हजार वर्ग मिलिमीटर होते हैं। प्रत्येक हजार वर्गों को (जिनका आकार मिलिमीटर है) सटा-सटा कर रखने पर 1 मीटर लंबा फीता मिलेगा। एक हजार ऐसे फीतों की लंबाई 1000 मीटर, अर्थात 1 कि० मी० होगी।

117. उत्तर से आप ठगे रह जायेंगे : स्तंभ की ऊँचाई 1000 कि० मी० होगी।

मुजबानी हिसाब करें। एक घन मीटर में हजार × हजार × हजार घन होंगे, जिनका आकार एक मिलिमीटर है। ऐसे एक हजार घनों को एक के ऊपर एक रखने से 1000 मि० मी०, अर्थात 1 मीटर ऊँचा स्तंभ प्राप्त होगा। पर हमारे पास ऐसे घनों की संख्या एक हजार से हजार × हजार गुना अधिक है। अतः स्तंभ की ऊँचाई 1000 000 मीटर, अर्थात 1000 कि० मी० होगी।

118. चित्र 100 से स्पष्ट है कि (कोण 1 और 2 की तुल्यता से) वस्तु के रैखिक आकार और उसके तदनुरूप चित्र के रैखिक आकारों का वही अनुपात होगा, जो वीक्ष से वस्तु की दूरी और कैमरे की गहराई का अनुपात है। प्रश्न में हवाई जहाज की ऊँचाई को x मीटर मान कर हम निम्न अनुपात प्राप्त करते हैं :

$$12\,000 : 8 = x : 0.12$$

चित्र 101

चित्र 102

चित्र 100

चित्र 103

यहाँ से $x = 180$ मी०.

119. 89.4 को एक मिलियन, अर्थात एक हजार हजार से गुणा करना चाहिये। गुणा दो चरणों में करेंगे: 89.4 ग्राम $\times 1000 =$ $= 89.4$ कि० ग्रा०, क्योंकि एक किलोग्राम एक ग्राम से हजार गुना अधिक होता है। अब और गुणा करें: 89.4 कि० ग्रा० $\times 1000 =$ 89.4 टन, क्योंकि एक टन एक किलोग्राम से हजार गुना अधिक होता है।

अतः इष्ट वजन है: 89.4 टन।

120. A से B तक पहुँचने के लिये सारे पथों की संख्या 70 होगी। (इस प्रश्न का सुडौल हल संचय-सिद्धांत से मिल सकता है, जिसका अध्ययन बीज-गणित में किया जाता है।)

121. चूंकि डायल पर की सभी संख्याओं का योग 78 के बराबर है, उसके छः भागों में से प्रत्येक में संख्याओं का योग $78 : 6 = 13$ होना चाहिये। यह ज्ञात कर लेने पर हल सरल हो जाता है, जो चित्र 101 में दिखाया गया है।

122—123. इनके हल क्रमशः चित्र 102 तथा 103 में दिखाये गये हैं।

124. तिपाई के तीनों पैर हर हालत में जमीन छूते हैं, क्योंकि व्योम में स्थित किन्हीं तीन बिन्दुओं से एक समतल गुजर सकता है और वह एकमात्र होता है। तिपाई के नहीं हिलने-डुलने का कारण यही है। जैसा आप देखते हैं, कारण शुद्ध ज्यामितीय है, भौतिकीय नहीं।

इसीलिये सरल उपकरणों और फोटो-कैमरों के लिये त्रिपादों का उपयोग करना अधिक सुलभ है। चौथा पैर उपकरण को और स्थिर नहीं बना सकता। इसके विपरीत, हरबार कुछ न कुछ करना पड़ता, ताकि उपकरण हिले-डुले नहीं।

125. प्रश्न का उत्तर देना सरल होगा, यदि समझ में आ जाये कि घड़ी की सूइयाँ कौन-सा समय दिखा रही हैं। बायें वृत्त में (चित्र 96) वे स्पष्टतः 7 बजे का समय दिखा रही हैं। अतः सूइयों के सिरों के बीच का चाप पूर्ण परिधि का $\frac{5}{12}$-वाँ भाग है। डिग्रियों में यह होगा:

$$360° \times \frac{5}{12} = 150°.$$

चित्र 104

समझना कठिन नहीं है कि दायें वृत्त में सूइयाँ साढ़े नौ का समय दिखा रही हैं। उनके सिरों के बीच का चाप पूर्ण परिधि के बारहवें भाग का $3^1/_2$ भाग, अर्थात $^7/_{24}$ भाग है।

डिग्रियों में यह होगा

$$360° \times \frac{7}{24} = 105°.$$

126. आदमी का कद 175 सें० मी० और पृथ्वी की त्रिज्या R मान कर पथों का अंतर ज्ञात करें:

$$2 \times 3.14 \times (R + 175) - 2 \times 3.14 \times R = 2 \times 3.14 \times 175 =$$
$$= 1100 \text{ सें० मी०},$$

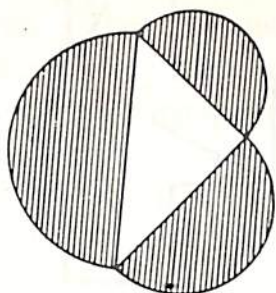
अर्थात सिर्फ 11 मीटर। सबसे आश्चर्य की बात यह है कि उत्तर गोले की त्रिज्या पर निर्भर नहीं करता। वह एक नन्हे गोले और विराट सूर्य पर भी इतना ही होगा।

127. प्रश्न की शर्त्त सरलतापूर्वक पूरी हो सकती है, यदि लोगों को षटकोण के आकार में खड़ा किया जाये (चित्र 104).

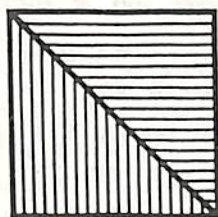
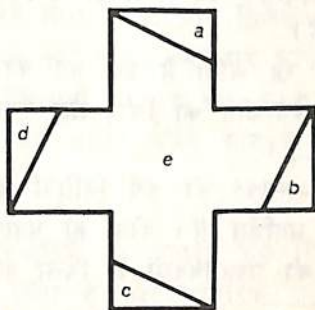
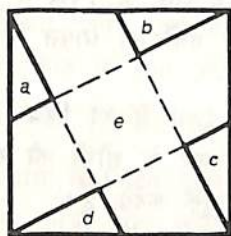
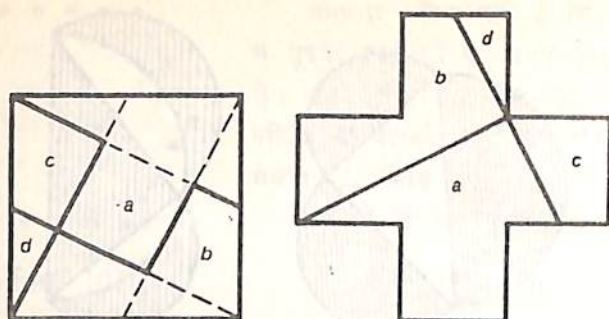
128. जिन पाठकों ने वृत्तीय वर्ग जैसे हलातीत प्रश्न* के बारे में सुना होगा, शायद इस प्रश्न को भी ज्यामितीय विधियों से हलातीत मान लेंगे। यदि पूर्ण वृत्त को बराबर क्षेत्रफल वाले वर्ग में परिवर्तित नहीं किया जा सकता, – बहुत से लोग सोचते हैं, – तो दो वृत्त-चापों से बनी चंद्राकार आकृति को भी समकोण आकृति में नहीं बदला जा सकता है।

पर यह प्रश्न बेशक ज्यामितीय बनावटों से हल हो सकता है, यदि हम पिथागोरस प्रमेय के एक मनोरंजक उपप्रमेय का उपयोग करें। जिस उपप्रमेय की बात मैं कर रहा हूँ, वह इस प्रकार है: समकोण

---

* प्रश्न है: दिये गये वृत्त के बराबर क्षेत्रफल वाले वर्ग को शुद्ध ज्यामितीय विधियों से, अर्थात पेंसिलों, एक परकाल और एक स्केल की मदद से बनाना। इस प्रश्न का हल संभव नहीं है। – अनु०

चित्र 105

चित्र 106

चित्र 107

चित्र 108

चित्र 109

चित्र 110

त्रिभुज में परस्पर लंब भुजाओं पर बने अर्द्ध-वृत्तों के क्षेत्रफलों का योग कर्ण पर बने अर्द्ध-वृत्त के क्षेत्रफल के बराबर होता है (चित्र 105)। बड़े अर्द्ध-वृत्त को दूसरी तरफ पलट कर (चित्र 106) हम देखते हैं कि दोनों पंक्तिदार चंद्रों के क्षेत्रफल मिल कर त्रिभुज के क्षेत्रफल के बराबर हैं।* यदि त्रिभुज समद्विबाहु हो, तो प्रत्येक चंद्र का क्षेत्रफल त्रिभुज के क्षेत्रफल से आधा होगा (चित्र 107)।

इससे निष्कर्ष निकलता है कि ज्यामितीय विधियों से एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज बनाया जा सकता है, जिसका क्षेत्रफल सही-सही चंद्राकृति के क्षेत्रफल के बराबर हो।

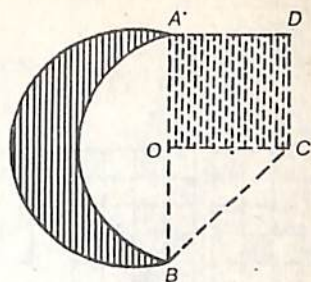
और चूंकि समद्विबाहु समकोण त्रिभुज बराबर क्षेत्रफल वाले वर्ग में परिवर्तित किया जा सकता है (चित्र 108), हमारी चंद्राकृति भी शुद्ध ज्यामितिय बनावट द्वारा बराबर क्षेत्र वाले वर्ग में बदली जा सकती है।

अब रह जाता है इस वर्ग को रेड-क्रौस के चिह्न में परिवर्तित करना (रेड-क्रौस का चिह्न पाँच बराबर वर्गों को आपस में सटा कर बनाते हैं)।

इस बनावट की कई विधियाँ हैं। इनमें से दो चित्र 109 तथा 110 में प्रदर्शित हैं। दोनों ही बनावट वर्ग के शीर्षों को सामने की भुजाओं की मध्य-बिंदुओं से मिला कर शुरू करते हैं।

---

*ज्यामिति में यह स्थिति "हाइपोक्रैट के चंद्र" नामक प्रमेय से प्रसिद्ध है।

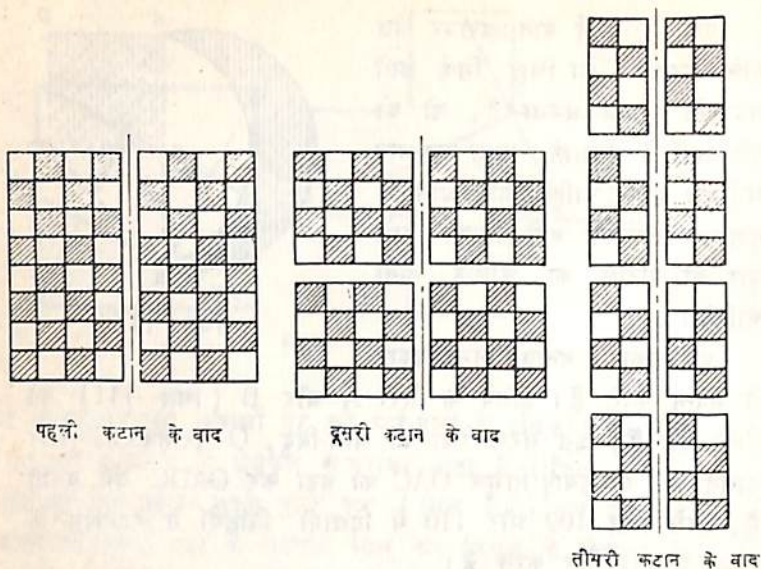
एक महत्वपूर्ण बात : बराबर क्षेत्र वाले रेड-क्रौस का चिह्न सिर्फ उसी चंद्राकृति से बन सकता है, जो दो वृत्त-चापों से बनी हो : वाह्य वृत्त-चाप अर्द्ध-वृत्त होना चाहिये और आंतरिक वृत्त-चाप तदनुरूप बड़ी त्रिज्या वाले वृत्त की परिधि का चौथाई होना चाहिये।*

चित्र 111

इस प्रकार, बनावट निम्न प्रकार से संपन्न करते हैं। हसिये के सिरों A और B (चित्र 111) को मिला देते हैं; इस सरल रेखा की मध्य-बिंदु, O पर लंब OC=OA डालते हैं। समद्विबाहु त्रिभुज OAC को बढ़ा कर OADC वर्ग बनाते हैं, जिसे चित्र 109 और 110 में दिखायी विधियों से रेड-क्रौस के चिह्न में परिवर्तित करते हैं।

129. बतायी गयी अतिरिक्त संभावना से समस्या आसान नहीं होती : छः से कम कर्तक (काटने वाले) समतल नहीं हो सकते। बड़े घन के 27 में से प्रत्येक आंतरिक घन के छः पार्श्व होते हैं और कोई भी कर्तक समतल इस आंतरिक घन के दो फलकों को एक साथ नहीं तराश सकता, चाहे हम टुकड़ों को जितनी भी विधियों से एक दूसरे पर न रखें।

130. पहले देखें कि काटों की न्यूनतम संख्या क्या हो सकती है। यदि हम एक बार काटेंगे, हमें तख्त के दो भाग मिलेंगे। अगली काट से, यदि वह दोनों भागों को काट सके, हमें चार भाग मिलेंगे। यदि उन्हें इस प्रकार रखा जाये कि सबों को एक साथ काटा जा सके, तो अगली काट से आठ भाग प्राप्त होंगे। चौथी काट के बाद 16

---

*आकाश में दिखने वाले चंद्र-हसिये का आकार कुछ भिन्न होता है : उसका वाह्य चाप अर्द्धवृत्त होता है और आंतरिक अर्द्ध-दीर्घवृत्त होता है। चित्रकार अवसर चंद्र-हसिया सही नहीं बनाते। वे उसे दो वृत्त-चापों से बना हुआ दिखाते हैं।

चित्र 112

टुकड़े मिलेंगे (यदि वह पिछले सभी टुकड़ों को एक साथ काट सके) और पाँचवी काट के बाद 32 टुकड़े प्राप्त होंगे। अर्थात पाँचवी काट के बाद 64 अलग-अलग वर्ग नहीं प्राप्त हो सकते। सिर्फ छठी काट के बाद जब टुकड़ों की संख्या दुगुनी हो जायेगी, हम 64 पृथक वर्ग प्राप्त करने की आशा कर सकते हैं। मतलब कि छः काटों से कम में काम नहीं चलेगा।

अब यह दिखा देना है कि छः काटों से सचमुच में टुकड़ों की संख्या दुगुनी हो जायेगी और परिणाम-स्वरूप $2^6=64$ पृथक वर्ग प्राप्त होंगे। यह कठिन नहीं है: इसके लिये निरंतर यह ध्यान रखना होगा कि हर काट के बाद **बराबर** आकार के टुकड़े मिलें और हर अगली काट प्रत्येक टुकड़े को आधा कर दे। चित्र 112 में तीन काटें दिखायी गयी हैं।